

Untersuchungen zur Spektralschätzung stochastisch abgetasteter Signale am Beispiel der Laser-Doppler-Anemometrie

Gegenstand der Untersuchung

Die Geschwindigkeitsmessung mittels der Laser-Doppler-Anemometrie hat sich aufgrund des optischen und somit rückwirkungsfreien Meßprinzips auch bei der Untersuchung turbulenter Strömungen durchgesetzt. Informationen über die dynamischen Eigenschaften der Strömung gibt das Turbulenzspektrum (Leistungsdichte). Die Bindung des Meßverfahrens an Streuteilchen, die die eingestrahnten elektromagnetischen Wellen streuen, führt zu einem stochastischen (nicht äquidistanten) Abtastprozeß, wobei die Statistik der Abtastintervalle der Verteilung der Streuteilchen im Raum unterliegt und zudem mit der Meßgröße (Geschwindigkeit) korreliert ist (Abb. 1).

Bei der Analyse derartiger Prozesse muß zur Vermeidung von systematischen Fehlern die Abtaststatistik berücksichtigt werden, was bei lückenhaften Abtastprozessen (z. B. in der Sprachsignalverarbeitung) nicht notwendig ist (abschätzbarer Informationsverlust). Da zu keinem Zeitpunkt gesicherte Vorgaben über den Signalverlauf vor einem Meßereignis existieren, sind Signalrekonstruktion bzw. Prozeßidentifikation wesentlich schwieriger.

Unter extremen Meßbedingungen, z. B. in Verbrennungsmotoren (hoher Turbulenzgrad, nur kurzzeitige Stationarität, ungleichförmige Teilchenbesähung), versagen alle klassischen Verfahren. Im Rahmen des von der D F G geförderten Forschungsprojektes „*Untersuchungen nichtlinearer spektraler Schätzverfahren bei stochastischer, durch die Meßgröße vorgegebener Abtastung und kurzer Beobachtungsdauer*“ wurde ein bislang nicht bekanntes, leistungsfähiges Verfahren entwickelt, das im Beitrag vorgestellt werden soll.

Verfahren der Spektralschätzung

Zur LDA-Signalanalyse (Momente, Wahrscheinlichkeitsdichten, Korrelationen, Spektren) sind besondere Schätzverfahren notwendig. In allen hier vorgestellten Algorithmen, bishin zur Prozeßidentifikation, wird der i -te Meßwert mit einem zur momentanen Geschwindigkeit u_i umgekehrt proportionalen Faktor w_i gewichtet [1], wodurch die direkte Proportionalität von Meßrate und Geschwindigkeit bei Annahme einer Teilchengleichverteilung im Raum aufgehoben wird.

Prinzipielle Verarbeitungsmöglichkeiten von LDA-Daten:

- Die Meßwerte werden direkt (**D**), unter Berücksichtigung der statistischen Eigenschaften des Abtastprozesses verarbeitet.
- Aus dem abgetasteten Datensatz wird zunächst der kontinuierliche Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf rekonstruiert. Dieser wird dann mit klassischen Verfahren verarbeitet.
- Der Datensatz ist Grundlage für eine modellbasierte Prozeßidentifikation. Aus den geschätzten Modellparametern sind dann die statischen Kenngrößen direkt abzuleiten. Die Auswahl eines geeigneten Prozeßmodells erfordert a priori Wissen über den Signalcharakter.

Für die Leistungsdichte wurde in [2] ein Schätzer vorgestellt, der die stochastisch abgetasteten Daten direkt verarbeitet. Er ist für mittelwertfreie Prozesse mit exponentialverteilter, von der Geschwindigkeit statistisch unabhängigen Abtastintervallen erwartungstreu.

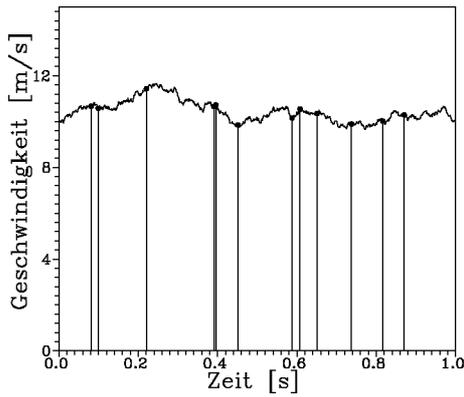


Abb. 1: LDA-Datensatz

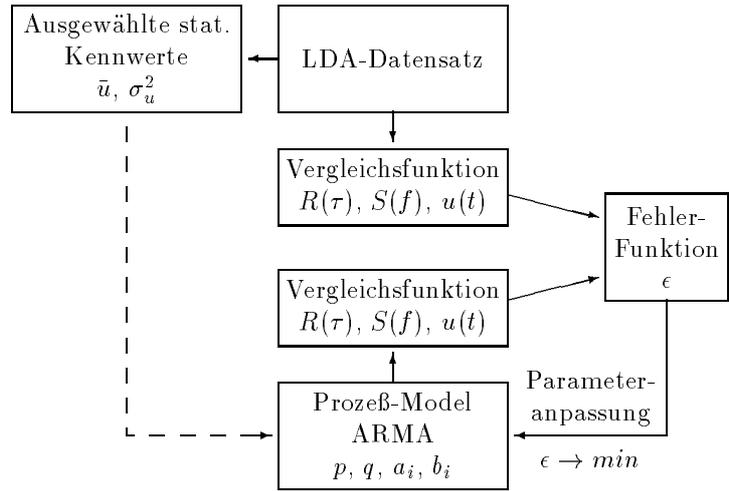


Abb. 2: Verfahren zur Parameterschätzung

Er wurde in [3] zur Aufhebung der Korrelation von Meßrate und Meßwert um die Wichtigung zu

$$\hat{S}(f) = \frac{T \left\{ \left| \sum_i u_i w_i e^{2\pi j f t_i} \right|^2 - \sum_i (u_i w_i)^2 \right\}}{\left(\sum_i w_i \right)^2}$$

erweitert (Meßzeit T).

Für die Rekonstruktion des kontinuierlichen Geschwindigkeits-Zeit-Verlaufs wurden verschiedene Algorithmen, von der Sample-and-Hold-Rekonstruktion (**S+H**), über Polynominterpolationen höherer Ordnung und Zeitdehnungstransformationen bis zu fraktalen Methoden untersucht. Sie alle liefern bei hoher Datenrate gute Rekonstruktionsergebnisse für die anschließende Leistungsdichteschätzung. Geringe Datenraten führen zu systematischen Fehlern. Zur Signalleistung addiert sich ein Rauschanteil, sichtbar im Bereich niedriger Frequenzen (Abb. 3). Bei höheren Frequenzen wird die gesamte Leistung tiefpaßgefiltert. Eine Abschätzung der Fehlergrößen für die **S+H** ist in [4] enthalten. Bessere Ergebnisse sind lt. [5] durch eine exponentielle Rekonstruktion mit

$$u(t) = e^{-b(t-t_i)} u(t_i) \quad t_i \leq t < t_{i+1}$$

erreichbar. In [5] ist weiterhin eine Abschätzung des oben beschriebenen „additiven“ (Rauschen) und des „multiplikativen“ Fehlers (Filter) für dieses Verfahren enthalten.

Bei der modellbasierten Spektralschätzung (**MB**) wird in diesem Beitrag die Strömung durch einen ARMA-Prozeß vorgegebener Ordnung ($p; q$) modelliert. Für einen bestimmten Modellparametersatz ($a_1; \dots; a_p; b_1; \dots; b_q; \sigma_e^2$) ist die spektrale Leistungsdichte analytisch durch

$$S(f) = \frac{|1 + b_1 e^{-2\pi j f} + \dots + b_q e^{-2\pi j f q}|^2}{|1 + a_1 e^{-2\pi j f} + \dots + a_p e^{-2\pi j f p}|^2} \sigma_e^2$$

gegeben. Die realisierte Koeffizientenbestimmung basiert auf einer modifizierten Korrelationsfunktion mit Wichtigung als Vergleichsfunktion, bestehend aus zwei Hilfsfunktionen

$$g_k = \sum_{i,j=1}^N u_i u_j w_i w_j \quad \text{und} \quad h_k = \sum_{i,j=1}^N w_i w_j \quad \text{mit} \quad (k-1)\Delta\tau < t_j - t_i \leq k\Delta\tau$$

mit $k = 1, \dots, N_s$ Slots (keine Selbstprodukte, keine Division durch die Anzahl der Einträge im Slott). Für einen bestimmten Parametersatz erfolgt durch

$$\epsilon^2 = \sum_{k=1}^{N_s} (R_k h_k - g_k)^2$$

mit der analytisch aus dem Parametersatz gewonnenen Korrelationsfunktion R_k die Festlegung einer Fehlergröße ϵ^2 , welche durch Veränderung der Parameter durch einen Suchalgorithmus schrittweise minimiert wird (Abb. 2).

Neben der direkten Angabe der spektralen Leistungsdichte können die so bestimmten Modellparameter zur Signalrekonstruktion mit

$$u_{i+k\Delta\tau} = u_i R_k / R_0$$

eingesetzt werden. Für einen AR-Prozeß 1. Ordnung ist das Verfahren dann identisch mit der exponentiellen Rekonstruktion in [5].

Methoden der Verifikation

Zur systematischen Untersuchung zufälliger und systematischer Fehler der modellbasierten Spektralschätzung in Abhängigkeit von den Meßbedingungen (z.B. Datenrate \dot{N}) werden umfangreiche Rechner-Simulationen des LDA-Meßprozesses, basierend auf [1], durchgeführt. Neben einer simulierten Geschwindigkeits-Grundserie können auch Daten von einem Hitzdrahtanemometer (HDA) verarbeitet werden und als Grundserie für eine anschließende Simulation der Teilchenbesähung herangezogen werden. Dadurch wird die Leistungsfähigkeit der Algorithmen bei verschiedenen Teilchenraten unter der Bedingung einer real aufgenommenen Strömung abschätzbar. Darüber hinaus können die Daten eines parallel zum HDA arbeitenden LDA zur experimentellen Verifikation aufgenommen und analysiert werden.

Ergebnisse

Exemplarisch seien hier die Messungen in einem achsensymmetrischen Freistrahle, aufgenommen mit einem HDA, 8D hinter einer Düse, vorgestellt. Der Turbulenzgrad Tu beträgt ca. 19%, die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} ca. 9.55 m/s und das Integralzeitmaß I ca. 3 ms. Die HDA-Daten sind mit 20 kHz abgetastet (60 Werte pro Integralzeitmaß) und werden zur Simulation des LDA-Prozesses als Geschwindigkeitsgrundserie verwendet. Hierbei werden bei der Simulation der Teilchenserie sowohl die exponentialverteilten Abstände der Meßereignisse als auch die Korrelation von Meßrate und Meßgröße berücksichtigt. Die Simulation erfolgte für eine Datendichte $N_D = \dot{N} I = 1.6$. Mit den unterschiedlichen Verfahren werden die Leistungsdichten für jeweils einen Datenblock von $N = 300$ Meßwerten bestimmt. Zur Darstellung des Spektrums werden jeweils die berechneten Leistungsdichten von $N_B = 20$ Blöcken gemittelt (Gesamtdatensatz: 6000 Meßwerte). Abb. 3 zeigt vergleichend die Resultate der drei beschriebenen Methoden zusammen mit den HDA-Daten als Referenz.

Die Analyse der HDA-Daten zeigt deutlich zwei Grenzfrequenzen. Diesen Sachverhalt kann keiner der vorgestellten LDA-Schätzer zufriedenstellend nachweisen. Die Teilchenrate ist zur Auflösung dieser Frequenz zu klein. Die direkte Leistungsdichteschätzung zeigt eine große Varianz oberhalb von etwa $\dot{N}/2\pi$. Dagegen ist die Schätzung unterhalb dieser Frequenz sehr zuverlässig, so daß dieses Verfahren bei hohen Datenraten erfolgreich eingesetzt werden kann. Durch Blockmittelung ist die Varianz der Schätzung weiter

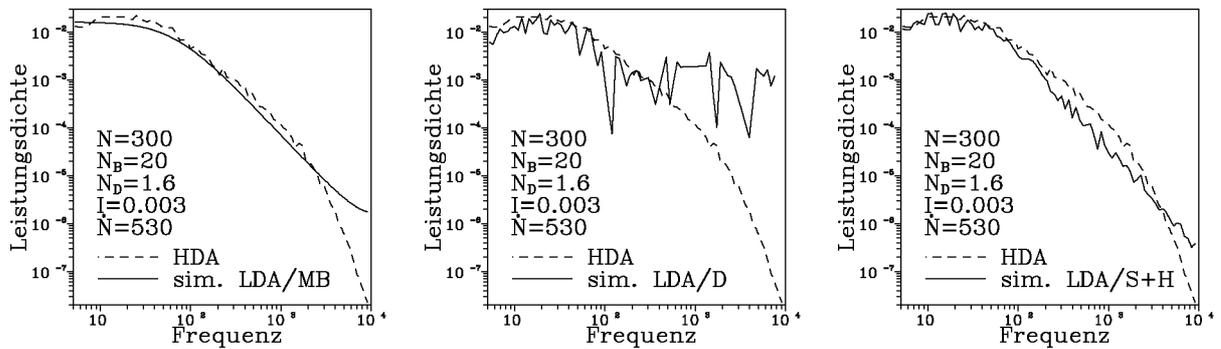


Abb. 3: Vergleich experimentell gewonnener HDA-Daten mit simulierten und unterschiedlich verarbeiteten LDA-Daten (**MB**=modellbasiert; **D**=direkt; **S+H**=Sample-and-Hold-rekonstruiert)

reduzierbar, und somit die Leistungsdichte bei sehr langen Datensätzen auch oberhalb von $\dot{N}/2\pi$ noch bestimmbar. Die Sample-and-Hold-Rekonstruktion zeigt deutlich das in [4] beschriebene „step noise“ bei niedrigen Teilchenraten sowie den Filtereffekt. Der Abfall der **S+H**-Kurve in Abb.3 resultiert nur aus der Tiefpaßfilterung des Rauschens und spiegelt nicht den Verlauf des Turbulenzspektrums wider. Für hohe Datenraten verschwinden diese Fehler, so daß sich die Ergebnisse der direkten Methode annähern. Die parametrische Leistungsdichteschätzung für ein AR-Modell 1. Ordnung erweist sich hingegen als sehr robust und kann daher auch für sehr geringe Teilchenraten und kurze Datensätze eingesetzt werden. Sie vermag jedoch weder Periodizitäten noch die zweite Grenzfrequenz zu erkennen, was durch das gewählte Modell und die Ordnung vorgegeben ist. Eine Wiederholung der Rechnung mit einem AR-Modell 2. Ordnung ergab keine wesentlichen Unterschiede.

Literatur

- [1] Fuchs, W., Nobach, H., and Tropea, C., 1993, “The Simulation of LDA Data and its Use to Investigate the Accuracy of Statistical Estimators,” *AIAA Journal*, Vol. 32, pp. 1883-1889.
- [2] Gaster, M., and Roberts, J.B., 1977, “The Spectral Analysis of Randomly Sampled Records by a Direct Transform,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, Vol. 154, pp. 27-58.
- [3] Nobach, H., 1993, “Simulationen zum Einfluß von Teilchen-Seeding und Prozesseigenschaften auf die Ergebnisse konventioneller Methoden zur Turbulenzspektrumbestimmung beim Laser-Doppler-Anemometer,” Großer Beleg, Universität Rostock.
- [4] Adrian, R.J., and Yao, C.S., 1987, “Power Spectra of Fluid Velocities Measured by Laser Doppler Velocimetry,” *Exp. in Fluids* Vol. 5, pp. 17-28.
- [5] Høst-Madsen, A., 1994, “A New Method for Estimation of Turbulence Spectra for Laser Doppler Anemometry,” *Proc. 7th Int. Symp. of Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, LADOAN, Lisbon, paper 11.1.

Dipl.-Ing. Holger Nobach
 Prof. Dr.-Ing. habil. Erika Müller
 Universität Rostock, Fachbereich Elektrotechnik
 Institut für Nachrichtentechnik und Informationselektronik
 Richard-Wagnern-Straße 31, 18119 Rostock