

**Simulationen zum Einfluß von Teilchen-Seeding und  
Prozessoreigenschaften auf die Ergebnisse  
konventioneller Methoden zur  
Turbulenzspektrumbestimmung beim  
Laser-Doppler-Anemometer**

**Großer Beleg**

(korrigierte Fassung)

cand. ing. Holger Nobach  
geb. am 22.07.69 in Rostock

## Großer Beleg

für Herrn cand. ing. Holger Nobach

Thema: Simulationen zum Einfluß von Teilchen-Seeding und Prozessor-Eigenschaften auf die Ergebnisse konventioneller Methoden zur Turbulenzspektrumbestimmung beim Laser-Doppler-Anemometer

Im Rahmen des Forschungsvorhabens „Anwendung moderner Methoden der Informationsgewinnung in der Laser-Doppler-Anemometrie“ sind die bisherigen Untersuchungen zur Beeinflussung von Geschwindigkeits-Mittelwert und -Varianz zu erweitern.

Auf der Basis der erstellten Simulation des LDA-Meßprozesses in 1D- und 3D-Strömungsgeschwindigkeitsfeldern sind

Möglichkeiten zur Prüfung von Algorithmen zur Bestimmung räumlicher Korrelationen aus den Meßwerten eines Zweipunkt-LDA zu schaffen,

ein Software-Modul zur Berechnung des Turbulenzspektrums aus den simulierten Prozessor-, Teilchen- und (zu Vergleichszwecken) der simulierten Geschwindigkeitsgrundserie wahlweise mittels

- Resampling und FFT
- Autokorrelationsmethode
- Autocovarianzmethode (direkte Transformation)

zu erstellen und

den Einfluß der Seeding-Parameter ( $N_D$ , homogen/inhomogen) und der Prozessor-Typen und -Eigenschaften ( $N_e$ ,  $f_S$ , Einfach-/Mehrfachmessungen, Totzeiten) auf das berechnete Turbulenzspektrum zu ermitteln.

Die Software-Ergänzungen des Simulationsprogramms haben so zu erfolgen, daß moderne nichtlineare Interpolationsmethoden der Turbulenzspektrumsbestimmung konzeptionell berücksichtigt und später eingefügt werden können.

Tag der Ausgabe: 01.03.93  
Tag der Abgabe: 31.08.93  
Betreuer: Frau Prof. Dr. Müller / Dr. Fuchs  
Prof. Dr. Tropea (Uni Erlangen, LSTM)

Prof. Dr.-Ing. habil. R. Kohlschmidt  
Institutsdirektor

## **Kurzreferat**

Die Laser-Doppler-Anemometrie findet als berührungsloses optisches Geschwindigkeitsmeßverfahren in der Strömungsmechanik starke Verbreitung.

Das durch das Meßprinzip erhaltene Meßwertensamble ist aufgrund der physikalischen Grundlagen eine stochastisch abgetastete Funktion der Strömungsgeschwindigkeit.

Dabei sind die Abtastzeitpunkte durch den zu untersuchenden Prozeß bestimmt.

Der Einsatz bei Untersuchungen in hochturbulenten Strömungen erfordert die Schätzung des Turbulenzspektrums aus dem Meßwertensamble.

Die Anwendung des Definitionsintegrals der spektralen Leistungsdichte auf das Meßwertensamble führt zu nicht erwartungstreuen Schätzungen.

Da die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion durch das Meßwertensamble nur an den Abtastzeitpunkten definiert ist, führen a priori Informationen über den Prozeß zu Möglichkeiten der Interpolation zu kontinuierlichen Funktionen.

Es werden Schätzalgorithmen der spektralen Leistungsdichte sowohl aus dem Meßwertensamble direkt als auch aus interpolierten Geschwindigkeits-Zeit-Funktionen und ihre Fehlerursachen vorgestellt. Des weiteren werden Möglichkeiten der Abschätzung der systematischen Fehler sowie zu deren Korrektur und die Ergebnisse bei der Anwendung auf simulierte Meßdaten vorgestellt.

# Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	6
<b>1 Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>2 Spektralanalyse beim LDA</b>	<b>11</b>
<b>3 Methoden der Spektralanalyse</b>	<b>14</b>
3.1 Definitionen . . . . .	14
3.2 Klassifikation . . . . .	17
3.3 Direkte Methoden . . . . .	19
3.4 Methoden auf der Basis der Signalrekonstruktion . . . . .	22
3.4.1 Resampling . . . . .	22
3.4.2 DFT (Fourierintegral) . . . . .	23
<b>4 Untersuchung der Schätzmethoden</b>	<b>24</b>
4.1 Algorithmen der Simulation . . . . .	24
4.2 Kriterien zur Bewertung der Schätzqualität . . . . .	26
4.3 Referenzmodelle . . . . .	27
4.4 Modellanpassung . . . . .	29
<b>5 Ausgewählte Ergebnisse</b>	<b>30</b>
5.1 Aspekte der Auswertung und Simulationsparameter . . . . .	30
5.2 Auswertung der Simulationsergebnisse . . . . .	33
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>34</b>
<b>Literatur</b>	<b>36</b>
<b>A Ausgewählte Herleitungen und Beweise</b>	<b>38</b>
A.1 Beweis für die Identität der gewichteten Autokovarianzmethod- de und der gewichteten Autokorrelationmethode . . . . .	38
A.2 normierte Fensterfunktionen . . . . .	39
A.3 Turbulenzspektrumbestimmung über Fourierintegral bei Sig- nalrekonstruktion durch Approximation 0. Ordnung für aus- gewählte Fensterfunktionen . . . . .	42
A.4 Ausgewählte Integrale . . . . .	46

<b>B</b>	<b>Parameter des Simulationsprogramms</b>	<b>49</b>
<b>C</b>	<b>Ausgewählte Ergebnisse zu Untersuchungen der Schätzalgorithmen</b>	<b>52</b>
	<b>Erklärung</b>	<b>94</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	Nicht äquidistante Abtastung des kontinuierlichen Signals . . .	18
2	Methoden zur Bestimmung des Turbulenzspektrums nicht äquidistant abgetasteter Signale . . . . .	19
3	Zeitlicher Mittelwert- und Varianzbias eindimensionaler Strö- mungen in Abhängigkeit vom Turbulenzgrad . . . . .	21
4	Interpolation der Grundserie für die Geschwindigkeitsbestim- mung der Teilchenserie . . . . .	25
5	Theoretische Ausgangsleistungsdichte des kontinuierlichen und des zeitäquidistanten Abtastfiltermodells für $\phi = 0,99$ . . . . .	30

## Symbolverzeichnis

$a(t)$	Abtastfunktion
$c$	Verstärkungsfaktor
$d(t)$	Fensterfunktion
$e(t)$	zufällige, mittelwertfreie, unkorrelierte, normalverteilte Störung
$f$	Frequenz
$\mathfrak{f}$	Laufvariable für die Frequenz
$f_{res}$	Resamplingfrequenz $f_{res} = \frac{N_{res}}{T} = \frac{1}{T_{res}}$
$f_s$	Shiftfrequenz
$f(x), g(x)$	allg. Funktionen von $x$
$i, k, r$	Laufvariablen
$j$	imaginäre Einheit
$p$	Differentiationsoperator $\frac{\partial}{\partial t}$
$t$	Zeit
$t_i$	Abtastzeitpunkt
$u(t), v(t), w(t)$	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t)$
$u_a(t), v_a(t), w_a(t)$	Komponenten der abgetasteten Geschwindigkeitsfunktion $\vec{v}(t)$
$\vec{v}(t)$	Geschwindigkeitsvektor
$\vec{v}_i$	Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt $t_i$
$z$	zeitlicher Verschiebeoperator $e^p$
$D_0$	Normierungsfaktor der Fensterfunktion mit $D(t) = \frac{d(t)}{D_0}$
$D(t)$	normierte Fensterfunktion mit $\frac{1}{T} \int_0^T D^2(t) dt = 1$
$E\{x\}$	Erwartungswert der Zufallsgröße $x$
$\hat{E}\{x\}$	geschätzter Erwartungswert der Zufallsgröße $x$
$N$	Anzahl der Samples innerhalb $T$
$\dot{N}_0$	Meßvolumenrate
$\dot{N}_1$	Triggerrate
$\dot{N}_2$	Meßrate
$\dot{N}_3$	Datenspeicherrate
$N_D$	mittlere Teilchenrate

$N_{res}$	Anzahl der Resamples innerhalb $T$
$P_{xx}(f), P_{xx}(\omega)$	spektrale Leistung der Größe $x$
$P_{xy}(f), P_{xy}(\omega)$	spektrale Kreuzleistung der Größen $x$ und $y$
$\mathbb{R}$	Bereich der reellen Zahlen
$R_{xx}(\tau)$	zeitliche Autokorrelationsfunktion der Größe $x$
$R_{xy}(\tau)$	zeitliche Kreuzkorrelationsfunktion der Größen $x$ und $y$
$S_{xx}(f), S_{xx}(\omega)$	spektrale Leistungsdichte (Turbulenzspektrum) der Größe $x$
$S_{xy}(f), S_{xy}(\omega)$	spektrale Kreuzleistungsdichte (Turbulenzspektrum) der Größen $x$ und $y$
$T$	Meßzeit
$TU$	Turbulenzgrad
$T_{res}$	Resamplingperiode $T_{res} = \frac{T}{N_{res}} = \frac{1}{f_{res}}$
$\mathbb{Z}$	Bereich der ganzen Zahlen
$\alpha$	Modellparameter
$\beta$	Bias allg.
$\beta_1$	Mittelwertbias
$\beta_2$	Varianzbias
$\gamma_{0i}$	Wichtungsfaktor zum Zeitpunkt $t_i$
$\gamma_{xy}$	Kovarianz der Größen $x$ und $y$
$\delta(t)$	Diracfunktion
$\vartheta_{xx}$	integrales Zeitmaß (zeitliches Korrelationsintervall) der Größe $x$
$\vartheta_{xy}$	integrales Zeitmaß (zeitliches Korrelationsintervall) der Größen $x$ und $y$
$\sigma_x^2$	Varianz der Zufallsgröße $x$
$\tau$	Laufvariable für die Zeit
$\tau_{mi}$	Aufenthaltszeit des Streuteilchens im Meßvolumen
$\phi$	Modellparameter
$\omega$	Kreisfrequenz
$\Gamma_{\vec{v}}$	Kovarianzmatrix des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$
$\Theta_{\vec{v}}$	integrale Zeitmaßmatrix des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$
$\Phi$	Parametermatrix

$x^{(Def)}$	Definition der Größe $x$
$x^{(i)}$	Größe $x$ lt. Def. für das Modell $i$
$\hat{x}$	Schätzwert der Zufallsgröße $x$
$\hat{x}^{(i)}$	Schätzwert der Zufallsgröße $x$ nach Methode $i$
$x^*$	bezogene Größe $x$
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl von $x$ ( $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ mit $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ )
$(x_1; x_2)$	offenes Intervall von $x_1$ bis $x_2$
$(x_1; x_2]$	links offenes Intervall von $x_1$ bis $x_2$
$[x_1; x_2)$	rechts offenes Intervall von $x_1$ bis $x_2$
$[x_1; x_2]$	geschlossenes Intervall von $x_1$ bis $x_2$
$f_1(x) * f_2(x)$	Faltungsintegral $f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)f_2(x - s) ds$

# 1 Einleitung

Die wesentlichen Eigenschaften der Laser-Doppler-Anemometrie als Strömungsgeschwindigkeitsmeßverfahren

- berührungsloses, indirektes optisches Verfahren
- absoluter, linearer Zusammenhang zwischen der Strömungsgeschwindigkeit und der Signalfrequenz als elektrischer Meßgröße
- geometrisch definierte Richtungsabhängigkeit im Raum
- hohe räumliche und zeitliche Auflösung
- Erweiterbarkeit zur simultanen Mehrkomponentenmessung

führten zu einem verbreiteten Einsatz in der Strömungsmechanik.

Die Informationsgewinnung im LDA-Burstbetrieb ist durch die stochastische, vom zu untersuchenden Prozeß vorgegebene Abtastung der Strömungsgeschwindigkeit gekennzeichnet.

Bei der Erforschung dynamischer Eigenschaften von Strömungsprozessen in der Aero- und Hydrodynamik kommen Spektralanalyseverfahren zum Einsatz. Aufgrund der physikalischen Grundlagen der Laser-Doppler-Anemometrie und der daraus resultierenden Eigenschaften des aus dem LDA-Meßprozeß gewinnbaren Datensatzes, ist die Schätzung des Leistungsdichtespektrums an a priori Informationen über den untersuchten Prozeß und an den Schätzalgorithmus angepaßte Fehlerkorrekturmethode gebunden.

Die bisher eingesetzten Verfahren können in

- Methoden mit einer direkten Verarbeitung der nichtäquidistant abgetasteten Daten und
- Methoden mit vorangehender Rekonstruktion eines kontinuierlichen Signals

unterteilt werden.

Die Methoden der direkten Verarbeitung der nichtäquidistant abgetasteten Daten wurden von mehreren Autoren hinsichtlich ihrer Fehler untersucht und bereits erfolgreich in der Laser-Doppler-Anemometrie eingesetzt ([2],[9],[10],[15],[16]).

Die Rekonstruktion eines kontinuierlichen Signals aus dem nichtäquidistant abgetasteten Datensatz setzt physikalische a priori Informationen über den untersuchten Prozeß voraus. Die Interpolationsmethoden reichen von einfachen Rekonstruktionsmethoden wie Interpolation 0. Ordnung (Resampling) oder lineare Interpolationsmethoden mit anschließender Filterung ([3]) über Koordinatentransformationsmethoden ([5],[17]) bis hin zu fraktalen Methoden ([4]).

In der vorliegenden Arbeit werden, ausgehend von Rechnersimulationen des Meßprozesses, Algorithmen zur Schätzung des Turbulenzspektrums aus dem Meßwertensemble untersucht.

Für die verschiedenen Algorithmen werden Ursachen systematischer und zufälliger Fehler und Möglichkeiten ihrer Korrektur untersucht. Hierbei beziehen sich die theoretischen Betrachtungen vorwiegend auf allgemeine stochastische Abtastprozesse. Die Algorithmen der Spektralanalyse und ihre Fehlerkorrekturmethode werden dann anhand von Rechnersimulationen des LDA-Meßprozesses untereinander und mit den theoretischen Spektren verglichen, die aus den statistischen Vorgaben für die Simulation resultieren.

Zunächst werden im folgenden Abschnitt die Besonderheiten der Spektralanalyse bei der Anwendung auf Meßdaten eines LDA, resultierend aus den physikalischen Grundlagen des Meßverfahrens, erläutert.

Im dritten Abschnitt werden die Methoden der Schätzung der spektralen Leistungsdichte definiert und klassifiziert und detaillierte Angaben zu den in dieser Arbeit untersuchten Methoden gemacht.

Die Beschreibung der Simulation des Meßprozesses und des Vorgehens bei der Untersuchung der Schätzmethoden zur Gewinnung der spektralen Leistungsdichte aus den simulierten Meßdaten schließen sich im vierten Abschnitt an.

Im fünften Abschnitt sind ausgewählte Ergebnisse der Rechnersimulationen und der aus den simulierten Meßdaten gewonnenen Leistungsdichten sowie die Einstellwerte der Simulationen zusammengefaßt.

Der sechste Abschnitt enthält Ergebnisse von Voruntersuchungen auf Grundlage von Rechnersimulationen zum Einsatz der untersuchten Methoden unter extremen Meßbedingungen.

## 2 Spektralanalyse beim LDA

Die Laser-Doppler-Anemometrie beruht darauf, daß kleine Teilchen mit einem vernachlässigbaren Schlupf vom strömenden Medium mitgeführt werden, und diese eingestrahlte elektromagnetische Wellen streuen.

Passiert ein Teilchen das Meßvolumen, so bildet sich durch die Wechselwirkung des Teilchens mit dem räumlichen elektromagnetischen Feld der räumliche Intensitätsverlauf auf dem Fotoempfänger zeitlich ab, der den zeitlichen Intensitätsverlauf in eine elektrische Meßgröße umwandelt.

Aus dem elektrischen Signal beim Meßvolumendurchtritt eines Teilchens ist die Geschwindigkeit dieses Teilchens in Meßrichtung bestimmbar. Ausgehend von der Voraussetzung, daß das Teilchen der Strömung schlupfflos folgt, kann hieraus auf die Momentangeschwindigkeit der Strömung in Meßrichtung  $u$  geschlossen werden.

Somit ist die Informationsgewinnung über die momentane Strömungsgeschwindigkeit nur dann möglich, wenn ein Streuteilchen das Meßvolumen passiert. Die Geschwindigkeitsbestimmung unterliegt somit der statistischen Verteilung der Teilchen im Strömungsfaden und ist ein Abtastprozeß. Die Abtastung erfolgt stochastisch und ist durch die Strömung vorgegeben.

Da die Streuteilchen vom strömenden Medium mitgeführt werden, ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Auftretens eines Meßereignisses sowohl eine Funktion der räumlichen Verteilungsdichte der Teilchen im Gesamtvolumen als auch des zeitlichen Verlaufs der Strömungsgeschwindigkeit und somit der Meßgröße selbst.

Die Bestimmung von zeitlichen Mittelwerten mittels

$$\hat{E}\{f(u(t))\} = g(N) \sum_{i=1}^N f(u(t_i)) \quad (2.1)$$

ist somit nicht erwartungstreu. Die systematischen Fehler dieser Schätzer werden durch

$$\beta = \frac{E\{\hat{E}\{f(u(t))\}\} - E\{f(u(t))\}}{E\{f(u(t))\}} \quad (2.2)$$

beschrieben.

Vorangegangene Untersuchungen ([7], [8]) haben Möglichkeiten zur Abschätzung des systematischen Fehlers

$$\beta_1 = \frac{E\{\hat{E}\{u(t)\}\} - E\{u(t)\}}{E\{u(t)\}} \quad (2.3)$$

bei der Schätzung des zeitlichen Geschwindigkeitsmittelwertes mittels

$$\hat{E}\{u(t)\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(t_i) \quad (2.4)$$

sowie des systematischen Fehlers

$$\beta_2 = \frac{E\{\hat{E}\{(u(t) - E\{u(t)\})^2\}\} - E\{(u(t) - E\{u(t)\})^2\}}{E\{(u(t) - E\{u(t)\})^2\}} \quad (2.5)$$

bei der Schätzung des zeitlichen Mittelwertes der Geschwindigkeitsvarianz mittels

$$\hat{E}\{(u(t) - E\{u(t)\})^2\} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N u^2(t_i) - \frac{N}{N-1} (\hat{E}\{u(t)\})^2 \quad (2.6)$$

sowie Möglichkeiten der Korrektur mittels Wichtung aufgezeigt.

Die Schätzung der spektralen Leistungsdichte ist aufgrund des stochastischen Charakters des Eingangssignals ebenfalls eine Zufallsfunktion. Aufgrund der stochastischen Abtastung, die durch die Meßgröße vorgegeben ist, unterliegt die Spektralschätzung folgenden Fehlerursachen:

- Varianz der Schätzung des Leistungsdichtespektrums des ursprünglichen, kontinuierlichen Signals, das abgetastet wird
- Varianz der Schätzung des Leistungsdichtespektrums der Abtastfunktion
- systematischer Fehler der Schätzung der Leistungsdichte des ursprünglichen, kontinuierlichen Signals durch Schluß aus dem Spektrum der abgetasteten Funktion (Faltung des ursprünglichen Spektrums mit dem Spektrum der Abtastfunktion) [10]
- Korrelation der Abtasthäufigkeit mit der Meßgröße [16]

- Korrelation der ursprünglichen Funktion über das Meßintervall hinaus
- Informationsverlust durch die Abtastung
- Leakage- und Aliasing-Fehler

Als Eingangsdaten für die Spektralschätzung, v. a. bei Verwendung einer Fensterfunktion, wird ein mittelwertfreies Signal vorausgesetzt. Daher muß zunächst der Mittelwert des Eingangssatzes ermittelt werden und der Datensatz zu einem mittelwertfreien Signal aufbereitet werden. Dazu ist die Festlegung eines Schätzalgorithmus für den Mittelwert nötig.

Zur Verringerung der Varianz der Schätzung kann eine Mittelung über mehrere Einzelrealisierungen der Spektralschätzung vorgenommen werden ([10]). Hierzu wird die gesamte Meßzeit in mehrere Blöcke unterteilt, die einzeln der Spektralanalyse unterzogen werden. Die Einzelrealisierungen werden dann mittels

$$\hat{E}\{S(f)\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{S}^{(i)}(f) \quad (2.7)$$

zu einem Mittelwert der Spektralschätzung zusammengefaßt, dessen Varianz kleiner als die der Einzelschätzung ist.

Da die Varianz der Einzelschätzung sowohl vom Strömungszustand innerhalb der Meßzeit der Einzelschätzung als auch von der in dieser Zeit anfallenden Datenmenge abhängig ist, muß dann zusätzlich ein Prüfalgorithmus (Validierung) über die Brauchbarkeit der Eingangsdaten eingefügt werden und eine Festlegung des Definitionsbereiches einer evtl. eingefügten Fensterfunktion gemacht werden. Die Einzelrealisierungen der Spektralschätzungen werden dann über die Anzahl der überprüften und als brauchbar eingeschätzten Blöcke gemittelt. Dieses Verfahren der Blockmittelung ist kein Verfahren zur Spektralschätzung, sondern ist unabhängig von dem gewählten Schätzverfahren auf alle Algorithmen anwendbar und wird bei den Rechnersimulationen dieser Arbeit stets eingesetzt.

## 3 Methoden der Spektralanalyse

### 3.1 Definitionen

Die Strömungsgeschwindigkeit selbst ist phänomenologisch eine Zufallsgröße, die durch statistische Größen beschreibbar ist. In der Strömungsmechanik wird zur Beschreibung der Verteilungsdichte der Strömungsgeschwindigkeit der Turbulenzgrad definiert. Für eindimensionale Messungen ist er durch

$$TU^{(Def)} = \frac{\sqrt{E\{(u - E\{u\})^2\}}}{E\{u\}} \quad (3.1)$$

definiert. Er beschreibt das Verhältnis von Wechsel- zu Gleichanteil der Geschwindigkeit. Dabei wird von isotroper Turbulenz und einer ausgeprägten Hauptströmungsrichtung ausgegangen. Damit ergibt sich die Definition des Turbulenzgrades für mehrdimensionale Messungen zu

$$TU^{(Def)} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{E\{(u - E\{u\})^2\} + E\{(v - E\{v\})^2\} + E\{(w - E\{w\})^2\}}{E^2\{u\} + E^2\{v\} + E^2\{w\}}}. \quad (3.2)$$

Da bei dieser Definition Kreuzkorrelationen der Wechselanteile der Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit nicht berücksichtigt werden, kann der Turbulenzgrad nur einen groben Überblick über die Turbulenzverhältnisse geben. Für detailliertere Untersuchungen ist neben dem mittleren Strömungsvektor die vollständige Kovarianzmatrix und die Korrelationsmatrix zur Beschreibung nötig.

Da die Strömungsgeschwindigkeit ein stochastisches Signal ist, ist sie somit ein Leistungssignal. Unter der Voraussetzung der Stationarität ist für dieses die spektrale Leistungsdichte durch

$$S_{uu}^{(Def)}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \left| \int_0^T u(t) e^{2\pi j f t} dt \right|^2 \right\} \quad (3.3)$$

definiert.

Im engen Zusammenhang zur spektralen Leistungsdichte steht die Autokorrelierte, die für stationäre Leistungssignale durch

$$R_{uu}^{(Def)}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) u(t + \tau) dt \quad (3.4)$$

definiert ist.

Der Zusammenhang dieser ist durch das Wiener-Chinčĭn-Theorem

$$S_{uu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (3.5)$$

gegeben.

Für stationäre, stochastische Signale ist demnach die spektrale Leistungsdichte für alle reellen Frequenzen definiert und endlich.

Die spektrale Leistung ist durch

$$P_{uu}^{(Def)}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \int_{f-\Delta f}^{f+\Delta f} S_{uu}(f) df \quad (3.6)$$

definiert.

Da die Leistungsdichte für stationäre, stochastische Signale für alle reellen Frequenzen endlich ist, ist die spektrale Leistung für alle reellen Frequenzen null.

Die Leistung des Signals ist nur über ein Frequenzintervall  $[f_1; f_2]$  durch

$$P_{uu}^{(Def)}(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} S_{uu}(f) df \quad (3.7)$$

definiert und endlich.

Für das kontinuierliche, stationäre, stochastische Signal gilt somit

	Funktionsbereich	Wertebereich
$S_{uu}(f)$	$f \in \mathbb{R}$	endlich reell
$P_{uu}(f)$	$f \in \mathbb{R}$	0

Durch die zeitliche Begrenzung der realen Messung des stochastischen Signals sind Festlegungen der Behandlung der nicht erfaßten Bereiche zu machen. Hier sind zwei Annahmen üblich:

- Die stochastische Funktion ist außerhalb des Meßintervalls gleich null.
- Die Funktion ist in  $T$  periodisch.

Durch diese Annahme unterscheiden sich die Schätzmethoden der spektralen Leistungsdichte

- hochauflösende Verfahren (die stochastische Funktion ist außerhalb des Meßintervalls gleich null)
- harmonische Analysatoren (die Funktion ist in  $T$  periodisch).

Die hochauflösenden Verfahren liefern demnach über das Fourierintegral für ein festes  $T$  eine Schätzung der spektralen Leistungsdichte im gesamten reellen Frequenzbereich.

Für die hochauflösenden Verfahren zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte gilt somit

	Funktionsbereich	Wertebereich
$S_{uu}(f)$	$f \in \mathbb{R}$	endlich reell
$P_{uu}(f)$	$f \in \mathbb{R}$	0

Demgegenüber liefern die harmonischen Analysatoren (FFT, DFT über Fourierreihe) spektrale Leistungen an den abgetasteten Frequenzen. Demnach ist die spektrale Leistungsdichte eine Diracfolge mit uneigentlichen Funktionswerten bei diesen Frequenzen.

Für die harmonischen Analysatoren gilt somit

	Funktionsbereich	Wertebereich
$S_{uu}(f)$	$f \in \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{T}$	$\pm\infty$
$P_{uu}(f)$	$f \in \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{T}$	endlich reell

Für den Vergleich der harmonischen Analysatoren mit den hochauflösenden Verfahren und theoretischen Vergleichsmodellen wird für die harmonischen Analysatoren die spektrale Leistungsdichte wie folgt definiert.

$$S_{uu}^*(f) = T \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \int_{f-\Delta f}^{f+\Delta f} S_{uu}(f) df = T P_{uu}(f) \quad (3.8)$$

Hierbei sei  $P_{uu}(f)$  die vom Analysator gelieferte spektrale Leistung und  $S_{uu}(f)$  die zugehörige Leistungsdichte (Diracfolge).

Die so definierte Leistungsdichte  $S_{uu}^*(f)$  stimmt an den abgetasteten Frequenzen mit der Leistungsdichte des stochastischen Signals überein und wird im folgenden mit  $S_{uu}(f)$  bezeichnet.

## 3.2 Klassifikation

Das kontinuierliche Signal  $u(t)$  besitze das Leistungsdichtespektrum  $S_{uu}(f)$ . Das Signal  $u(t)$  wird durch die Abtastfunktion  $a(t)$

$$a(t) = \sum_{i=1}^N \delta(t - t_i) \quad (3.9)$$

mit

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

und

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\Delta t}^{\Delta t} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.11)$$

abgetastet. Hierbei sind die  $t_i$  die Abtastzeitpunkte, wobei diese durch eine Zufallsfunktion bestimmt sind mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(t \in \{t_i\}; \forall i \in \{1, \dots, N\})$$

Die Abtastung des kontinuierlichen Signals wird durch die Multiplikation

$$u(t)a(t) = u_a(t) = \sum_i u(t_i)\delta(t - t_i)$$

realisiert (Abb.1).

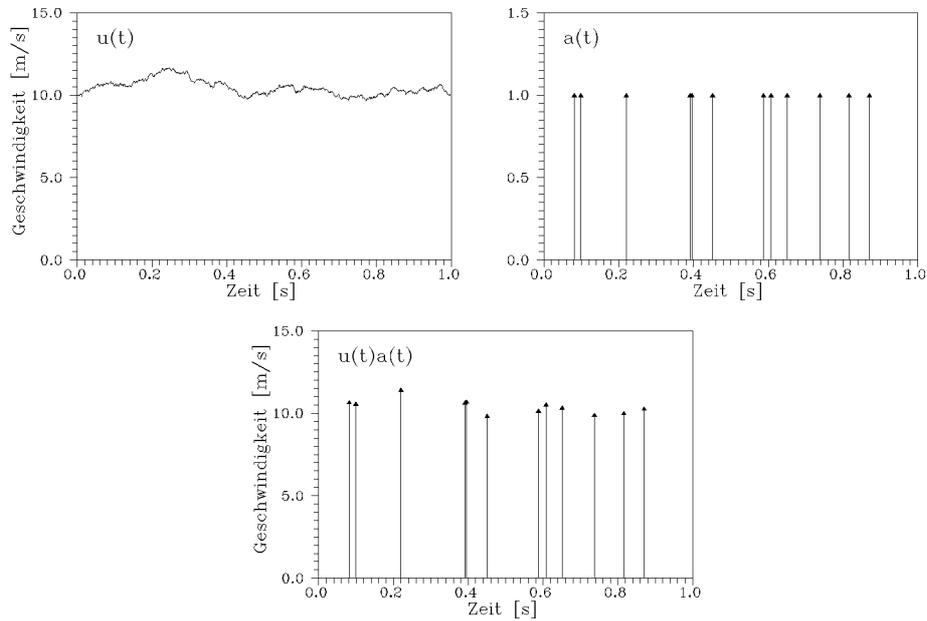


Abbildung 1: Nicht äquidistante Abtastung des kontinuierlichen Signals

Besitzt die Abtastfunktion  $a(t)$  die spektrale Leistungsdichte  $S_{aa}(f)$ , so hat  $u_a(t)$  das Spektrum  $S_{uu}(f) * S_{aa}(f)$ . Dieses ergibt sich unter Verwendung der unter 3.1 genannten Definition

$$S_{u_a u_a}^{(Def)}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \left| \int_0^T u_a(t) e^{2\pi j f t} dt \right|^2 \right\} \quad (3.12)$$

für die spektrale Leistungsdichte des abgetasteten Signals (direkte Methoden). Die Bestimmung einer Realisierung der Schätzung des Leistungsdichtespektrums der gemessenen Realisierung des Signals erfolgt dann wahlweise mit Hilfe des Periodogramms (Autokovarianzmethode) oder mit Hilfe des Korrelogramms (Autokorrelationsmethode). Bei der Verwendung von nicht-linearen Schätzmethoden (z.B. Blockkorrelation) wird das Spektrum zusätzlich von diesen Nichtlinearitäten beeinflusst.

Da die Abtastung i.a. zu stochastischen Zeitpunkten erfolgt, können nur mit Hilfe der statistischen Eigenschaften der Abtastfunktion Aussagen über die spektrale Leistungsdichte der Abtastfunktion und somit auch des abge-

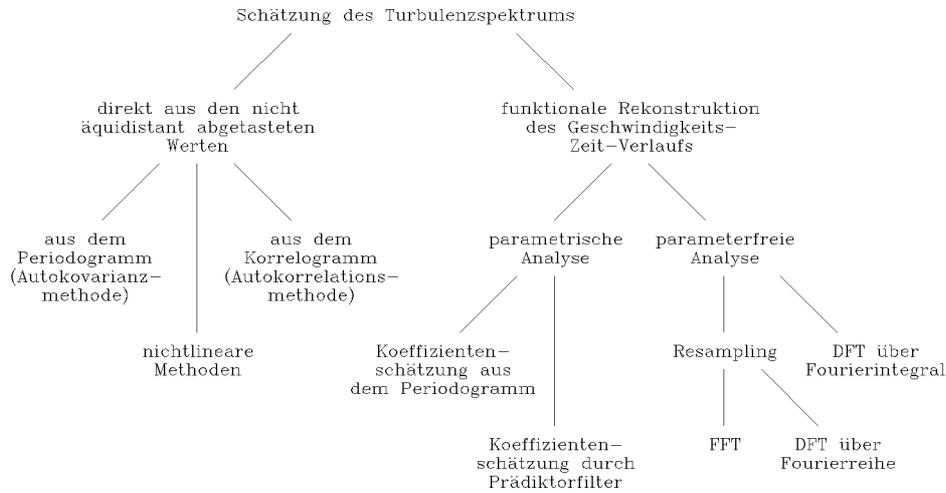


Abbildung 2: Methoden zur Bestimmung des Turbulenzspektrums nicht äquidistant abgetasteter Signale

tasteten Signals gemacht werden. Die Leistungsdichte ist dann ebenfalls eine stochastische Funktion mit vorhersagbaren statistischen Eigenschaften.

Da die statistischen Eigenschaften des Leistungsdichtespektrums der Abtastfunktion z.B. von der Verteilungsdichte der Abtastzeitpunkte abhängig sind, sind allgemeine Lösung für beliebige Abtastfunktionen, deren Verteilungsdichte mit der stochastischen Meßgröße korreliert ist, sehr komplex.

In diesem Fall kann die wahre Leistungsdichte des kontinuierlichen Signals durch die Bestimmung des Leistungsdichtespektrums eines aus den Abtastwerten rekonstruierten Signals angenähert werden (Signalrekonstruktion).

Abbildung 2 zeigt eine Übersicht über die Methoden der Spektralanalyse stochastisch abgetasteter Signale, von denen ausgewählte näher betrachtet werden.

### 3.3 Direkte Methoden

In [10] wurde für stochastisch abgetastete LDA-Signale die spektrale Leistungsdichte durch

$$\hat{S}_{uu}^{(1)}(f) = \frac{1}{N_D^2 T} \left| \sum_i u(t_i) D(t_i) e^{2\pi j f t_i} \right|^2 \quad (3.13)$$

bzw.

$$\hat{S}_{uu}^{(2)}(f) = \frac{1}{N_D^2 T} \left\{ \sum_k \sum_{r \neq k} u(t_k) u(t_r) D(t_k) D(t_r) e^{2\pi j f (t_k - t_r)} + \sum_i u^2(t_i) D^2(t_i) \right\} \quad (3.14)$$

mit der mittleren Teilchenrate  $N_D = \frac{N}{T}$  berechnet.

Dort wurde gezeigt, daß für exponentialverteilte Abstände der Abtastzeitpunkte  $t_i$  diese Schätzung aufgrund der Faltung der wahren spektralen Leistungsdichte  $S_{uu}(f)$  des kontinuierlichen Signals mit der spektralen Leistungsdichte des Abtastsignals einen Bias besitzt.

Eine erwartungstreue Schätzung ist lt. [10]

$$\hat{S}_{uu}^{(3)}(f) = \frac{1}{N_D^2 T} \left\{ \left| \sum_i u(t_i) D(t_i) e^{2\pi j f t_i} \right|^2 - \sum_i u^2(t_i) D^2(t_i) \right\} \quad (3.15)$$

bzw.

$$\hat{S}_{uu}^{(4)}(f) = \frac{1}{N_D^2 T} \sum_k \sum_{r \neq k} u(t_k) u(t_r) D(t_k) D(t_r) e^{2\pi j f (t_k - t_r)} \quad (3.16)$$

Da die Abtastrate, wie unter 2 gezeigt, mit der Meßgröße korreliert ist, ist die Schätzung der Varianz nicht erwartungstreu. Somit hat auch die Schätzung der Leistungsdichte noch einen weiteren Bias, der vom Turbulenzgrad der Strömung abhängig ist.

Untersuchungen zum Bias der Mittelwert- und der Varianzschätzung in turbulenten Strömungen ([7], [8]) haben Ergebnisse zur Abschätzung des Varianzbias  $\beta_2$  ergeben. In Abbildung 3 sind der zu erwartende Mittelwertbias  $\beta_1$  und der Varianzbias  $\beta_2$  des Simulationsmodells dargestellt. In [16] wurde gezeigt, daß der Varianzbias sich direkt in der Leistungsdichteschätzung widerspiegelt.

Die Erfahrungen der Biaskorrektur bei der Mittelwert- und Varianzschätzung mittels Wichtung ([7], [8]) führten zu einer gewichteten Schätzung ohne Korrektur des durch die stochastische Abtastung verursachten Bias

$$\hat{S}_{uu}^{(5)}(f) = \frac{T \left| \sum_i \frac{u(t_i)}{\gamma_{oi}} D(t_i) e^{2\pi j f t_i} \right|^2}{\left( \sum_i \frac{1}{\gamma_{oi}} \right)^2} \quad (3.17)$$

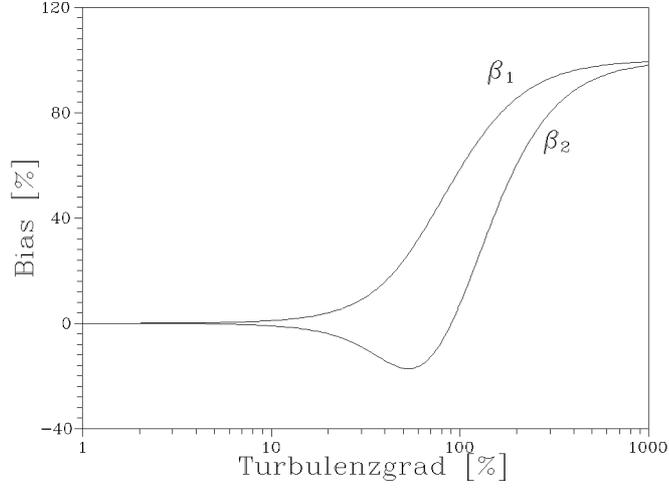


Abbildung 3: Zeitlicher Mittelwert- und Varianzbias eindimensionaler Strömungen in Abhängigkeit vom Turbulenzgrad

bzw.

$$\hat{S}_{uu}^{(6)}(f) = \frac{T \sum_k \sum_r \frac{u(t_k)u(t_r)}{\gamma_{0k}\gamma_{0r}} D(t_k)D(t_r) e^{2\pi j f(t_k - t_r)}}{\sum_k \sum_r \frac{1}{\gamma_{0k}\gamma_{0r}}} \quad (3.18)$$

sowie der gewichteten Schätzung mit Korrektur des durch die Abtastfunktion verursachten Bias

$$\hat{S}_{uu}^{(7)}(f) = \frac{T \left\{ \left| \sum_i \frac{u(t_i)}{\gamma_{0i}} D(t_i) e^{2\pi j f t_i} \right|^2 - \sum_i \left( \frac{u(t_i)}{\gamma_{0i}} D(t_i) \right)^2 \right\}}{\left( \sum_i \frac{1}{\gamma_{0i}} \right)^2} \quad (3.19)$$

bzw.

$$\hat{S}_{uu}^{(8)}(f) = \frac{T \sum_k \sum_{r \neq k} \frac{u(t_k)u(t_r)}{\gamma_{0k}\gamma_{0r}} D(t_k)D(t_r) e^{2\pi j f(t_k - t_r)}}{\sum_k \sum_r \frac{1}{\gamma_{0k}\gamma_{0r}}} \quad (3.20)$$

mit den Wichtungsfaktoren

$$\begin{aligned}
\text{Zeitdifferenzwichtung ([1], [6]):} & \quad \gamma_{0i} = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \\
\text{Sample-\&-Holdwichtung:} & \quad \gamma_{0i} = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \\
\text{Geschwindigkeitswichtung ([12]):} & \quad \gamma_{0i} = u(t_i) \\
\text{Aufenthaltszeitwichtung ([11]):} & \quad \gamma_{0i} = \frac{1}{\tau_{mi}} \\
\text{Wichtung nach Nakoa ([13]):} & \quad \gamma_{0i} = \left(2 - \frac{u(t_i)}{\bar{E}\{u\}}\right)^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Für  $\gamma_{0i} = 1$  (keine Wichtung) geht diese Schätzung in (3.15) bzw. (3.16) über.

Die gewichtete Autokovarianzmethode und die gewichtete Autokorrelationsmethode sind identisch. Der Beweis hierzu befindet sich im Anhang A.1.

## 3.4 Methoden auf der Basis der Signalrekonstruktion

### 3.4.1 Resampling

Durch eine Rekonstruktion der kontinuierlichen Geschwindigkeits-Zeit-Funktion ist es möglich, durch Resampling eine äquidistante Abtastung zu erzielen. Diese erlaubt die Anwendung harmonischer Analysatoren auf der Grundlage von Fourierreihen (FFT, DFT) mit

$$\hat{S}_{uu}^{(9)}(f) = \frac{T}{N_{res}^2} \left| \sum_{i=1}^{N_{res}} u(t_i) D(t_i) e^{2\pi j f t_i} \right|^2 \quad (3.21)$$

Die Abtastfunktion ist hier eine in  $T_{res}$  periodische Diracfolge, die spektrale Leistungsdichte demzufolge eine in  $f_{res} = \frac{1}{T_{res}}$  periodische Diracfolge. Dadurch ist die Schätzung der spektralen Leistungsdichte des rekonstruierten Signals ebenfalls in  $f_{res}$  periodisch und es tritt ein Aliasing-Fehler durch die Überlagerung auf. Durch eine Erhöhung der Resamplingfrequenz  $f_{res}$  kann dieser jedoch verringert werden. Die spektrale Auflösung ist durch die Meßzeit  $T$  gegeben und verbessert sich mit wachsender Meßzeit.

Ein großer Vorteil des Resampling liegt in der kurzen Berechnungszeit durch Anwendung der FFT.

### 3.4.2 DFT (Fourierintegral)

Für die interpolierte Geschwindigkeits-Zeit-Funktion kann die spektrale Leistungsdichte über das Fourierintegral

$$\hat{S}_{uu}^{(10)}(f) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T u(t)D(t)e^{2\pi jft} dt \right|^2 \quad (3.22)$$

ermittelt werden.

Der Vorteil liegt in der Möglichkeit der höheren spektralen Auflösung, da auch kurze Abstände der durch die Messung vorgegebenen Meßereignisse verarbeitet werden können. Darüber hinaus tritt kein Aliasing-Fehler auf.

Für die Schätzung der spektralen Leistungsdichte aus dem stochastisch abgetasteten Signal ergibt demzufolge

$$\hat{S}_{uu}^{(11)}(f) = \frac{1}{T} \left| \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t)D(t)e^{2\pi jft} dt \right|^2 \quad (3.23)$$

Da innerhalb  $T$  genau  $N$  Werte vorliegen, jedoch  $t_{N+1}$  nicht bekannt ist, ist die Summe nur bis  $N - 1$  zu berechnen. Das hat einen systematischen Fehler zur Folge, da die Summe um den letzten Summanden zu klein ist.

Eine verbesserte Schätzung, die diese Ursache ausschließt, ist

$$\hat{S}_{uu}^{(12)}(f) = \frac{1}{T} \left| \frac{N}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t)D(t)e^{2\pi jft} dt \right|^2 \quad (3.24)$$

Für die Interpolation der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion 0. Ordnung ist die Herleitung der zu lösenden Integrale im Anhang A.3 enthalten.

## 4 Untersuchung der Schätzmethoden

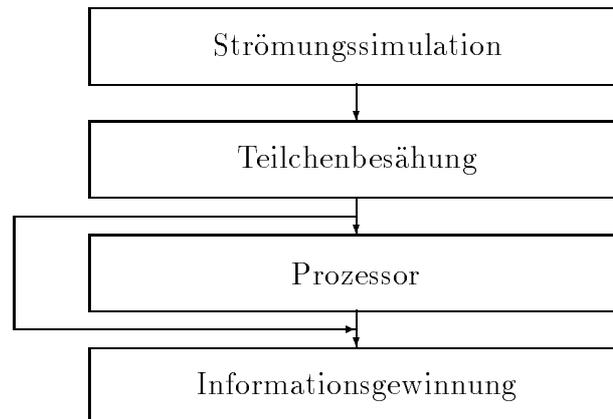
### 4.1 Algorithmen der Simulation

Zum Vergleich und zur Einschätzung der Leistungsfähigkeit der Methoden

- Rekonstruktion durch Interpolation 0. Ordnung und Resampling
- Rekonstruktion durch Interpolation 0. Ordnung und DFT (Fourierintegral)
- Autokorrelationsmethode/Autokovarianzmethode der stochastisch abgetasteten Signale ohne Biaskorrektur
- Autokorrelationsmethode/Autokovarianzmethode der stochastisch abgetasteten Signale mit Biaskorrektur

wurde das LDA-Simulationsprogramm ENTRY um die Spektralschätzung mittels dieser Methoden erweitert.

Die Simulation des LDA-Meßprozesses erfolgt in vier Schritten:



Eine detaillierte Beschreibung der Algorithmen ist in [14] enthalten.

Bei der Simulation des Geschwindigkeits-Zeit-Verlaufs (Grundserie) der Strömung wird von einer normalverteilten Momentangeschwindigkeit mit dem Erwartungswert  $E\{\vec{v}(t)\}$  und der Varianz  $E\{(\vec{v}(t) - E\{\vec{v}(t)\})^2\}$  ausgegangen. Es wird ein autoregressiver Prozeß 1. Ordnung (1D-Simulation) bzw. eine Verkettung von drei autoregressiven Prozessen 1. Ordnung (3D-Simulation) mit vorgebbaren Auto- bzw. Kreuzkorrelationen berechnet.

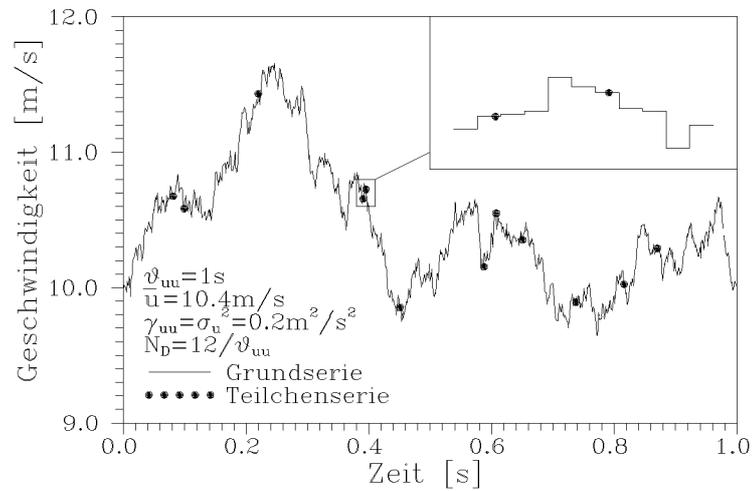
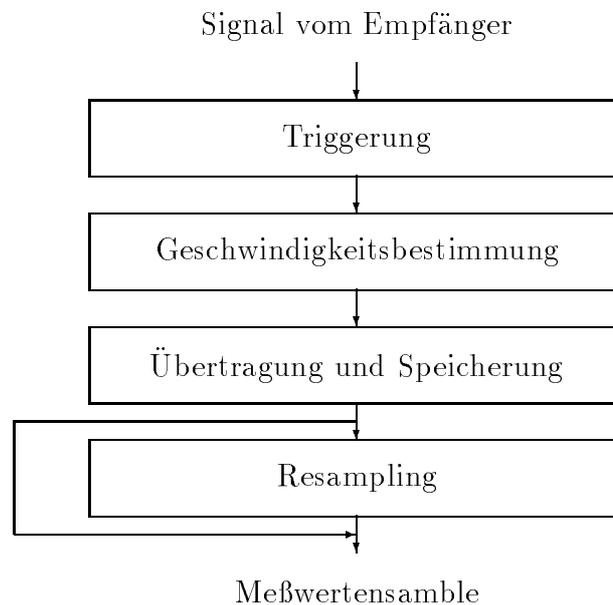


Abbildung 4: Interpolation der Grundserie für die Geschwindigkeitsbestimmung der Teilchenserie

Bei der Teilchenbesähung (Teilchenserie) wird der Abstand der Teilchen im Strömungsfaden (1D-Simulation) bzw. das Strömungsvolumen, das das Meßvolumen zwischen den Teilchendurchtritten durchquert (3D-Simulation) durch eine Zufallsfunktion gewählt. Der Strömungsfaden wird dann durch das Meßvolumen geführt und nimmt dabei die Teilchen mit, die dann zu einem Signal im optischen Empfänger führen. Dabei wird die Geschwindigkeit der Einzelteilchen aus der äquidistant abgetasteten Grundserie durch eine Interpolation 0. Ordnung gewonnen (Abb.4).

Die Simulation des Prozessors umfaßt die Reaktion der Meßtechnik vom optischen Empfänger bis zum Ablegen der Daten im Rechner.



Da das Meßwertensamble sowohl bei der Simulation als auch bei realer Messung als Datensatz im Rechner vorliegt, sind die Algorithmen der Datenbe- und -verarbeitung zur Informationsgewinnung und -verdichtung

- Methoden der Mittelwert- und Varianzschätzung
- Methoden der Spektralschätzung
- Methoden der Korrelationsanalyse

direkt auf den Datensatz anwendbar.

## 4.2 Kriterien zur Bewertung der Schätzqualität

Die im Abschnitt 3 erläuterten Schätzmethoden zur Spektralanalyse wurden auf eindimensionale LDA-Simulationen angewendet.

Zur Einschätzung der Leistungsfähigkeit der Schätzalgorithmen werden zunächst die theoretischen Spektren der Grundserie, gegeben durch die statistischen Eigenschaften, ermittelt. Diese werden mit den Realisierungen der Spektralschätzungen einer Grundserie verglichen. Diese stellen dann die bestmögliche Realisierung der Spektren der aus dieser Grundserie erzeugten Teilchen- bzw. Prozessorserien dar und werden zur Beurteilung dieser zum Vergleich herangezogen.

### 4.3 Referenzmodelle

Bei der Generierung einer eindimensionalen Grundserie wird im Simulationsprogramm ein stochastischer, zeitäquidistant abgetasteter, autoregressiver Prozeß 1. Ordnung

$$G(z) = \frac{z}{z - \phi}$$

bzw.

$$u(k) = \phi u(k-1) + e(k)$$

mit der mittelwertfreien gaußverteilten Störung  $e(k)$  verwendet. Die statistischen Eigenschaften des Ausgangssignals  $u(k)$  sind durch den Koeffizienten  $\phi$  des autoregressiven Modells und die Varianz der Störung  $\sigma_e^2$  gegeben.

Die hierdurch beschreibbare spektrale Leistungsdichte des Ausgangssignals  $S_{uu}(f)$  wird als Referenz für die harmonischen Analysatoren herangezogen.

Die hochauflösenden Verfahren basieren auf der Interpolation eines kontinuierlichen Signals. Im Simulationprogramm wird eine Interpolation 0. Ordnung durchgeführt. Dadurch werden die Varianz und der Mittelwert des Ausgangssignals nicht verändert.

Als Referenz für die hochauflösenden Analysatoren wird als Näherung für die spektrale Leistungsdichte des interpolierten Signals die eines kontinuierlichen Tiefpasses erster Ordnung mit

$$G(p) = \frac{c}{\alpha + p}$$

bzw.

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = ce(t) - \alpha u(t)$$

verwendet. Als Kriterium für die Wahl der Parameter wird die Übereinstimmung der Autokorrelationsfunktion  $R_{uu}(\tau)$  der Ausgangssignale des interpolierten Abtastmodells und des kontinuierlichen Modells an den Abtaststellen des nicht interpolierten Abtastmodells gewählt.

Für die drei Modelle gilt:

a) Abtastmodell

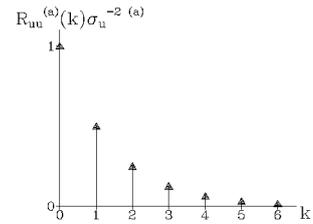
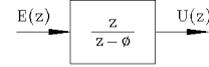
$$G(z) = \frac{z}{z - \phi} \quad (4.1)$$

$$R_{uu}^{(a)}(\tau) = \sigma_u^{2(a)} \phi^{|\tau|} \quad \text{für } \tau \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

$$\vartheta_{uu}^{(a)} = \frac{1}{1 - \phi} \quad (4.3)$$

$$\sigma_u^{2(a)} = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi^2} \quad (4.4)$$

$$S_{uu}^{(a)}(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos \omega} \quad (4.5)$$

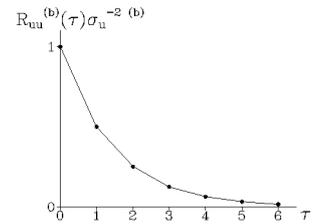
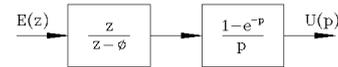


b) interpoliertes Abtastmodell

$$R_{uu}^{(b)}(\tau) = \sigma_u^{2(b)} \phi^{|\tau|} (1 - (\tau - \lfloor \tau \rfloor) \phi) \quad (4.6)$$

$$\vartheta_{uu}^{(b)} = \frac{1 + \phi}{2(1 - \phi)} \quad (4.7)$$

$$\sigma_u^{2(b)} = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi^2} \quad (4.8)$$



$$\begin{aligned} S_{uu}^{(b)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}^{(b)}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= 2\sigma_u^{2(b)} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \int_i^{i+1} (1 - (t - i)\phi) \cos \omega\tau d\tau \\ &= 2\sigma_u^{2(b)} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \left[ (1 + i\phi) \int_i^{i+1} \cos \omega\tau d\tau - \phi \int_i^{i+1} t \cos \omega\tau d\tau \right] \\ &= 2\sigma_u^{2(b)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\phi^i}{\omega} [(1 + i\phi) (\sin(i + 1)\omega - \sin i\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\phi((i+1)\sin(i+1)\omega + \cos(i+1)\omega \\
& -i\sin i\omega - \cos i\omega)] \tag{4.9}
\end{aligned}$$

### c) kontinuierliches Modell

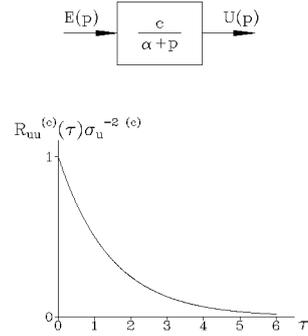
$$G(p) = \frac{c}{\alpha + p} \tag{4.10}$$

$$R_{uu}^{(c)}(\tau) = \sigma_u^{2(c)} e^{-\alpha|\tau|} \tag{4.11}$$

$$\vartheta_{uu}^{(c)} = \frac{1}{\alpha} \tag{4.12}$$

$$\sigma_u^{2(c)} = \frac{c^2 \sigma_\epsilon^2}{2\alpha} \tag{4.13}$$

$$S_{uu}^{(c)}(\omega) = \frac{c^2 \sigma_\epsilon^2}{\alpha^2 + \omega^2} \tag{4.14}$$



## 4.4 Modellanpassung

Zur Angleichung des kontinuierlichen Modells an das interpolierte Abtastmodell werden ihre Autokorrelationsfunktionen gleichgesetzt.

$$R_{uu}^{(b)}(\tau) = R_{uu}^{(c)}(\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{Z} \tag{4.15}$$

Es folgt:

$$\frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2} \phi^{|\tau|} (1 - (\tau - [|\tau|])\phi) = \frac{c^2 \sigma_\epsilon^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \quad \forall \tau \in \mathbb{Z} \tag{4.16}$$

und somit

$$\alpha = -\ln \phi \tag{4.17}$$

$$c = \sqrt{-\frac{2 \ln \phi}{1 - \phi^2}} \tag{4.18}$$

Die spektralen Leistungsdichten der so definierten Modelle sind für  $\phi = 0,99$  auf  $\sigma_u^2$  bezogen in Abbildung 5 im Vergleich dargestellt.

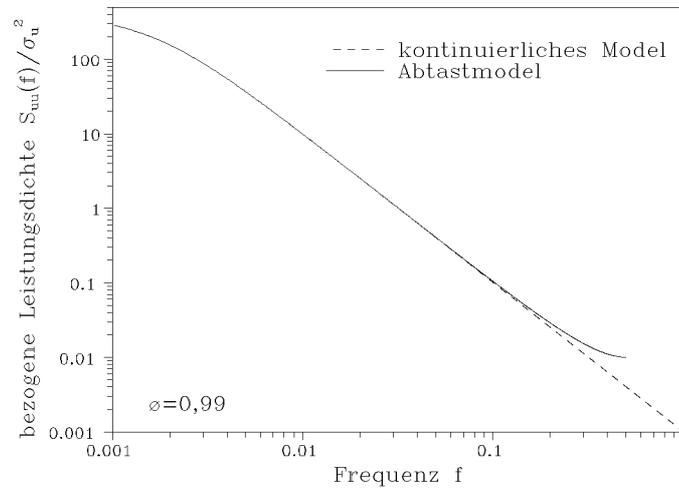


Abbildung 5: Theoretische Ausgangsleistungsdichte des kontinuierlichen und des zeitäquidistanten Abtastfiltermodells für  $\phi = 0,99$

## 5 Ausgewählte Ergebnisse

### 5.1 Aspekte der Auswertung und Simulationsparameter

Es wurden eindimensionale LDA-Simulationen mit Hilfe des Simulationsprogramms ENTRY durchgeführt. Es wurden Grundserie der Turbulenzgrade

$$TU = 100\%$$

$$TU = 10\%$$

$$TU = 300\%$$

generiert.

Dabei gelten für die Generierung der Grundserien folgende Einstellungen:

Turbulenzgrad:	100%	10%	300%
Varianz:	$1m^2s^{-2}$	$0,01m^2s^{-2}$	$9m^2s^{-2}$
integrales Zeitmaß:	1s	1s	1s
Punkte je int. Zeitmaß:	100	100	100
Meßzeit:	$100\vartheta$	$100\vartheta$	$100\vartheta$
mittl. Geschwindigkeit:	$1ms^{-1}$	$1ms^{-1}$	$1ms^{-1}$

Für jede Grundserie wurde die spektrale Leistungsdichte geschätzt. Da die Grundserie eine äquidistant abgetastete Geschwindigkeits-Zeit-Funktion ist, ergeben die Autokovarianz-/Autokorrelationsanalyse ohne Korrektur des Abtastbias und die Resamplingmethode für  $f_{res} = 100\vartheta^{-1}$  identische Ergebnisse. Daher wurde nur der Einfluß der Fensterfunktion auf die Methoden

- Rekonstruktion und Resampling
- Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral)

mit folgenden Einstellungen untersucht.

Rekonstruktion und Resampling:

Methode:	Rekonstruktion Resampling
Resamplingfrequenz:	$100\vartheta^{-1}$
Blocklänge:	10, $24\vartheta$
Mittelungen:	100

Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral):

Methode:	Rekonstruktion DFT (Fourierintegral)
Blocklänge:	10, $24\vartheta$
Mittelungen:	100
min. Frequenz:	$0\vartheta^{-1}$
max. Frequenz:	$75\vartheta^{-1}$
Anzahl <sup>1</sup> :	193

Die geschätzten Leistungsdichtespektren werden mit den theoretischen Spektren des Abtastmodells bzw. des kontinuierlichen Modells aus Abschnitt 4.3 verglichen.

---

<sup>1</sup>Anzahl der Stützstellen im Frequenzbereich [min. Frequenz; max. Frequenz]

Für jede Grundserie wurden dann drei Teilchenserien erzeugt mit folgenden Einstellungen:

Ausdehnung des Meßvolumens:	$20\mu m$	$20\mu m$	$20\mu m$
Teilchenrate:	konstant	konstant	konstant
mittlere Teilchenrate:	$50\vartheta^{-1}$	$10\vartheta^{-1}$	$1\vartheta^{-1}$

Für die Resamplingmethode und die Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral) gelten die Einstellungen wie für die Spektralanalyse der Grundserien. Für die Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit und ohne Korrektur des durch die Abtastfunktion verursachten Bias gilt die Einstellung wie für die Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral).

Es wurde der Einfluß der Fensterfunktion und des Wichtungsverfahrens für jede der Methoden

- Rekonstruktion und Resampling
- Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral)
- Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Korrektur des durch die Abtastfunktion verursachten Bias
- Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Korrektur des durch die Abtastfunktion verursachten Bias

untersucht.

Die so ermittelten Spektren werden mit den Realisierungen der Schätzung der spektralen Leistungsdichte aus der Grundserie verglichen, da diese die beste Realisierung der Leistungsdichteschätzung aus einer daraus abgeleiteten Teilchenserie darstellen.

Eine Übersicht über die zusätzlich zu den allgemeinen Einstellungen nötigen Parameter für die Simulation sind den Diagrammen im Anhang C vorangestellt.

Die in Abschnitt 2 definierte Validierung der Blöcke erfolgt in allen Fällen durch mindestens 2 Meßwerte innerhalb eines Blockes konstanter zeitlicher Ausdehnung und der Definitionsbereich der Fensterfunktion geht über die gesamte Blocklänge. Der Mittelwert, der zur Aufbereitung des Eingangssdatensatzes zu einem mittelwertfreien Signal herangezogen wird, wird durch Mittelung des Ensembles eines Blockes bestimmt.

$$\hat{E}\{u\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(t_i) \quad (5.1)$$

## 5.2 Auswertung der Simulationsergebnisse

Der geringe Einfluß der Fensterfunktion ist auf die Wahl der untersuchten Frequenzen der hochauflösenden Verfahren zurückzuführen, da bei den genannten Einstellungen kein Leckeffekt auftritt (Abb. C.1–C.5; Abb. C.6–C.10; Abb. C.11, C.17–C.20; Abb. C.21, C.27–C.30; Abb. C.31–C.35; Abb. C.36–C.40).

Die Methoden, die nicht auf der Rekonstruktion der kontinuierlichen Geschwindigkeits-Zeit-Funktion basieren, weisen eine sehr schlechte Konvergenz gegenüber denen mit Kurvenrekonstruktion auf (Abb. C.11–C.30, C.41, C.42, C.45, C.46, C.51, C.52, C.55, C.56, C.59, C.60, C.65, C.66, C.69, C.70, C.73, C.74; Abb. C.31–C.40, C.43, C.44, C.47, C.48, C.53, C.54, C.57, C.58, C.61, C.62, C.67, C.68, C.71, C.72, C.75, C.76).

Die Wichtung in der Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode verbessert die Schätzung nur für niedrige Frequenzen (Abb. C.11–C.16, C.21–C.26).

Es konnte der Bias, der durch die stochastische Abtastung verursacht wird, nachgewiesen werden (Abb. C.21–C.30, C.42, C.46, C.52, C.56, C.60, C.66, C.70, C.74).

Der zusätzliche Bias der Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode, verursacht durch den Bias in der Varianzschätzung, wird ebenfalls deutlich (Abb. C.11, C.21, C.41, C.42, C.45, C.46; Abb. C.51, C.52, C.55, C.56, C.59, C.60; Abb. C.65, C.66, C.69, C.70, C.73, C.74).

Die Methoden mit Kurvenrekonstruktion ergeben Schätzungen der spektralen Leistungsdichte, die den aus der Grundserie gewonnenen sehr nahe liegen (Abb. C.31–C.40, C.43, C.44, C.47, C.48, C.53, C.54, C.57, C.58, C.61, C.62, C.67, C.68, C.71, C.72, C.75, C.76).

Mit abnehmender Teilchenrate ( $N_D = 1\vartheta^{-1}$ ) wird die Kurvenrekonstruktion unzuverlässig und die Validierung der Blöcke gewinnt an Einfluß, wodurch die geschätzte Leistungsdichte zu gering wird (Abb. C.47, C.48, C.61, C.62, C.75, C.76).

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurden Methoden der Spektralanalyse stationärer, stochastischer Signale mit stochastischer Abtastung am Beispiel der Anwendung in der Laser-Doppler-Anemometrie untersucht.

Hierzu wurde der reale Meßprozeß durch eine Rechnersimulation ersetzt. Somit sind die Ergebnisse an die verwendeten Modelle gebunden und erfordern eine praktische Überprüfung.

Es konnte gezeigt werden, daß, im Gegensatz zur Spektralanalyse bei äquidistanter Abtastung, die Anwendung des Definitionsintegrals

$$S_{uu}^{(Def)}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \left| \int_0^T u(t) e^{2\pi j f t} dt \right|^2 \right\} \quad (6.1)$$

auf die stochastisch abgetastete Funktion aufgrund des zufälligen Charakters der Abtastfunktion nicht erwartungstreu ist und nur sehr langsam konvergiert.

Aufgrund der a priori bekannten physikalischen Eigenschaften der Strömung ist eine Interpolation des Signals möglich und sinnvoll.

Das so erhaltene kontinuierliche Modellsignal ist dann durch klassische Methoden der Spektralanalyse zu bearbeiten.

Die in dieser Arbeit verwendete Interpolation 0. Ordnung wies bereits, trotz der Einfachheit der Rekonstruktion, eine geringe Varianz in der Schätzung auf.

Die Schätzung ist nicht erwartungstreu, da systematische Fehler bei

- geringen Teilchenraten
- kurzen Meßzeiten

auftreten.

Voruntersuchungen in dieser Arbeit haben Möglichkeiten der Abschätzung dieser Fehler ergeben.

Die Ergebnisse sind Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen hinsichtlich

- kurzzeitig stationärer, stochastischer Signale
- moderner Methoden der Signalrekonstruktion

- nichtlinearer Parameterschätzverfahren
- Rechnersimulationen mit komplexen Strömungsmodellen.

## Literatur

- [1] Barnet, D. O.; Bentley, H. T.: Statistical bias of individual realization laser velocimetry. Proc. 2nd Int. Workshop on Laser Velocimetry Purdue, 1974, 428–444.
- [2] Bell, W. A.: Spectral analysis algorithms for Laser Velocimeter: A Comparative Study. AIAA Journal, Vol. 21, No. 5, 714–719.
- [3] Boyer, L.; Searby, G.: Random sampling: Distortion and reconstruction of velocity spectra from fast Fouriertransform analysis of analog signal of a laser Doppler processor. J. Appl. Phys. Vol. 60, No. 8, October 1986, 2699–2707.
- [4] Chao, Y. C.; Leu J. H.: A fractal reconstruction method for LDV spectral analysis. Experiments in Fluids 13, 1992, 91–97.
- [5] Clark, J. J.; Palmer, M. R.; Lawrence, P. D.: A transformation method for the reconstruction of function from uniformly spaced samples. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process, Vol. ASSP-33, No. 4, October 1985, 1151–1165.
- [6] Dimotakis, P. E.: Single scattering particle laser Doppler measurements of turbulence. Proc. AGARD-Conf. No. 193 Symp. on Non-intrusive Instrumentation in Fluid Flow Research Saint Louis, March 1976, Paper 10.
- [7] Fuchs, W.; Albrecht, H.; Nobach, H.; Tropea, C.; Graham, L. J. W.: Simulation and experimental verification of statistical bias in Laser Doppler Anemometry including non-homogeneous particle density. 6th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, July 1992, Lisbon.
- [8] Fuchs, W.; Nobach, H.: Auswirkungen der Turbulenz und inhomogener Streuteilchenkonzentrationen auf das Meßwertensemble eines Laser-Doppler- Anemometers. 7. Symposium Maritime Elektronik Arbeitskreis Maritime Meßelektronik, 1992, Rostock, 119–122.
- [9] Gaster, M.; Roberts, J. B.: Spectral Analysis of Randomly Sampled Signals. J. Inst. Maths Applics, 15, 1975, 195–216.

- [10] Gaster, M.; Roberts, J. B.: The spectral analysis of randomly sampled records by a direct transform. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 354, 1977, 27–58.
- [11] Hoesel, W.; Rodi, W.: New biasing elimination method for laser-Doppler velocimeter counter processing. Rev. Sci. Instrum. 48, 1977, 910–919.
- [12] McLaughlin, D. K.; Tiederman, W. G.: Biasing correction for individual realization of laser anemometer measurements in turbulent flows. Phys. of Fluids 16, 1973, 2082–2088.
- [13] Nakoa, S.; Terao, Y.; Hirata, K.: new method for eliminating the statistical bias in highly turbulent flow measurements. AIAA Journal 25, 1987, 443–447.
- [14] Nobach, H.: Simulation des LDA-Meßprozesses in mehrdimensionalen Strömungen. Universität Rostock, 1992, Kleiner Beleg.
- [15] Roberts, J. B.; Gaster, M.: On the estimation of spectra from randomly sampled signals: a method of reducing variability. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 371, 1980, 235–258.
- [16] Tropea, C.: Turbulence-Induced Spectral Bias in Laser Anemometry, AIAA Journal, Vol. 25, No. 2, 306–309.
- [17] Veynante, D.; Candel, S. M.: Application of nonlinear spectral analysis and signal reconstruction to laser Doppler velocimetry. Experiments in Fluids 6, 1988, 534–540.

## A Ausgewählte Herleitungen und Beweise

### A.1 Beweis für die Identität der gewichteten Autokovarianzmethode und der gewichteten Autokorrelationsmethode

**Voraussetzung:**

Seien

$$\hat{S}_{uu}^{(5)}(f) = \frac{T \left| \sum_i \frac{u(t_i)}{\gamma_{0i}} D(t_i) e^{2\pi j f t_i} \right|^2}{\left( \sum_i \frac{1}{\gamma_{0i}} \right)^2} \quad (\text{A.1})$$

(Autokovarianzmethode)

und

$$\hat{S}_{uu}^{(6)}(f) = \frac{T \sum_k \sum_r \frac{u(t_k)u(t_r)}{\gamma_{0k}\gamma_{0r}} D(t_k)D(t_r) \cos[2\pi f(t_k - t_r)]}{\sum_k \sum_k \frac{1}{\gamma_{0k}\gamma_{0r}}} \quad (\text{A.2})$$

(Autokorrelationsmethode)

**Behauptung:**

$$\hat{S}_{uu}^{(5)}(f) = \hat{S}_{uu}^{(6)}(f) \quad (\text{A.3})$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \hat{S}_{uu}^{(5)}(f) &= \frac{T \left| \sum_i \frac{u(t_i)}{\gamma_{0i}} D(t_i) e^{2\pi j f t_i} \right|^2}{\left( \sum_i \frac{1}{\gamma_{0i}} \right)^2} \\ &= \frac{T \left| \sum_i \frac{u(t_i)}{\gamma_{0i}} D(t_i) (\cos 2\pi f t_i + j \sin 2\pi f t_i) \right|^2}{\left( \sum_i \frac{1}{\gamma_{0i}} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{T \left| \sum_i \frac{u(t_i)}{\gamma_{0i}} D(t_i) \cos 2\pi f t_i + j \sum_i \frac{u(t_i)}{\gamma_{0i}} D(t_i) \sin 2\pi f t_i \right|^2}{\left( \sum_i \frac{1}{\gamma_{0i}} \right)^2} \\
&= \frac{T \left[ \left( \sum_i \frac{u(t_i)}{\gamma_{0i}} D(t_i) \cos 2\pi f t_i \right)^2 + \left( \sum_i \frac{u(t_i)}{\gamma_{0i}} D(t_i) \sin 2\pi f t_i \right)^2 \right]}{\left( \sum_i \frac{1}{\gamma_{0i}} \right)^2} \\
&= \frac{T}{\sum_k \sum_k \frac{1}{\gamma_{0k} \gamma_{0r}}} \left[ \sum_k \sum_r \frac{u(t_k) u(t_r)}{\gamma_{0k} \gamma_{0r}} D(t_k) D(t_r) \cos 2\pi f t_k \cos 2\pi f t_r \right. \\
&\quad \left. + \sum_k \sum_r \frac{u(t_k) u(t_r)}{\gamma_{0k} \gamma_{0r}} D(t_k) D(t_r) \sin 2\pi f t_k \sin 2\pi f t_r \right] \\
&= \frac{T}{\sum_k \sum_k \frac{1}{\gamma_{0k} \gamma_{0r}}} \sum_k \sum_r \frac{u(t_k) u(t_r)}{\gamma_{0k} \gamma_{0r}} D(t_k) D(t_r) (\cos 2\pi f t_k \cos 2\pi f t_r \\
&\quad + \sin 2\pi f t_k \sin 2\pi f t_r) \\
&= \frac{T \sum_k \sum_r \frac{u(t_k) u(t_r)}{\gamma_{0k} \gamma_{0r}} D(t_k) D(t_r) \cos[2\pi f(t_k - t_r)]}{\sum_k \sum_r \frac{1}{\gamma_{0k} \gamma_{0r}}} \\
&= \hat{S}_{uu}^{(6)}(f) \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Somit sind die beiden Verfahren identisch.

q.e.d.

## A.2 normierte Fensterfunktionen

Es wurden die Fensterfunktionen

- Rechteckfenster
- Dreieckfenster

- Hanningfenster
- Hammingfenster
- Blackmanfenster

untersucht.

Für die nicht normierten Fensterfunktionen gilt:

Fensterfunktion	$d(t)$
Rechteck	1
Dreieck	$1 - \left 2\frac{t}{T} - 1\right $
Hamming	$1 - \cos \frac{2\pi t}{T}$
Hanning	$1 - 0,84 \cos \frac{2\pi t}{T}$
Blackman	$1 - 1,19 \cos \frac{2\pi t}{T} + 0,19 \cos \frac{4\pi t}{T}$

Für die normierten Fensterfunktionen  $D(t)$  mit  $\frac{1}{T} \int_0^T D^2(t) dt = 1$  gilt dann:

$$D(t) = \frac{d(t)}{D_0} \quad (\text{A.5})$$

mit

$$D_0 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T d^2(t) dt} \quad (\text{A.6})$$

Für die Fensterfunktionen

- Rechteckfenster
- Hanningfenster
- Hammingfenster
- Blackmanfenster

läßt sich gemeinsam schreiben:

$$d(t) = 1 + a \cos \frac{2\pi t}{T} + b \cos \frac{4\pi t}{T} \quad (\text{A.7})$$

wobei für die ausgewählten Fensterfunktionen dann gilt:

	$a$	$b$
Rechteckfenster	0	0
Hanningfenster	-1	0
Hammingfenster	-0,84	0
Blackmanfenster	-1,19	0,19

Für diese Fensterfunktionen gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T d^2(t) dt &= \int_0^T \left( 1 + a \cos \frac{2\pi t}{T} + b \cos \frac{4\pi t}{T} \right)^2 dt \\
 &= \int_0^T \left( 1 + a^2 \cos^2 \frac{2\pi t}{T} + b^2 \cos^2 \frac{4\pi t}{T} + 2a \cos \frac{2\pi t}{T} \right. \\
 &\quad \left. + 2b \cos \frac{4\pi t}{T} + 2ab \cos \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{4\pi t}{T} \right) dt \\
 &= T \left( 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right) \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

Für das Dreiecksfenster gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T d^2(t) dt &= \int_0^T \left( 1 - 2 \left| \frac{t}{T} - 1 \right| \right)^2 dt \\
 &= 2 \int_0^{\frac{T}{2}} \left( 2 \frac{t}{T} \right)^2 dt \\
 &= 8 \int_0^{\frac{T}{2}} \left( \frac{t}{T} \right)^2 dt \\
 &= \frac{T}{3} \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

Damit gelten für die Fensterfunktionen die Normierungsfaktoren

Fensterfunktion	$D_0$
Rechteck	1
Dreieck	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
Hamming	$\sqrt{1,5}$
Hanning	$\sqrt{1,3528}$
Blackman	$\sqrt{1,7261}$

### A.3 Turbulenzspektrumbestimmung über Fourierintegral bei Signalrekonstruktion durch Approximation 0. Ordnung für ausgewählte Fensterfunktionen

Für die spektrale Leistungsdichte gilt:

$$\hat{S}_{uu}^{(12)} = \frac{1}{T} \left| \frac{N}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t) D(t) e^{2\pi j f t} dt \right|^2 \quad (\text{A.10})$$

Für die Signalrekonstruktion durch Approximation 0. Ordnung gilt die Annahme:

$$u(t) = u(t_i) \quad \text{in} \quad [t_i; t_{i+1})$$

Dann gilt für die spektrale Leistungsdichte:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{uu}^{(12)} &= \frac{1}{T} \left| \frac{N}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(t_i) D(t) e^{2\pi j f t} dt \right|^2 \\ &= \frac{1}{T} \left| \frac{N}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} u(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t) e^{2\pi j f t} dt \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

wobei für die im Simulationsprogramm realisierten Fensterfunktionen gilt:

$$D(t) = \begin{cases} 1 & \text{(Rechteckfenster)} \\ \sqrt{3} (1 - |2\frac{t}{T} - 1|) & \text{(Dreieckfenster)} \\ \frac{1 - \cos 2\pi\frac{t}{T}}{\sqrt{1,5}} & \text{(Hanningfenster)} \\ \frac{1 - 0,84 \cos 2\pi\frac{t}{T}}{\sqrt{1,3528}} & \text{(Hammingfenster)} \\ \frac{1 - 1,19 \cos 2\pi\frac{t}{T} + 0,19 \cos 4\pi\frac{t}{T}}{\sqrt{1,7261}} & \text{(Blackmanfenster)} \end{cases}$$

Für die Fensterfunktionen

- Rechteckfenster
- Hanningfenster
- Hammingfenster
- Blackmanfenster

läßt sich gemeinsam schreiben:

$$D(t) = \frac{1 + a \cos \frac{2\pi t}{T} + b \cos \frac{4\pi t}{T}}{D_0} \quad (\text{A.12})$$

wobei für die ausgewählten Fensterfunktionen dann gilt:

	$a$	$b$	$D_0$
Rechteckfenster	0	0	1
Hanningfenster	-1	0	$\sqrt{1,5}$
Hammingfenster	-0,84	0	$\sqrt{1,3528}$
Blackmanfenster	-1,19	0,19	$\sqrt{1,7261}$

Dann folgt für  $f \neq 0$ :

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t) e^{2\pi j f t} dt \\ &= \frac{1}{D_0} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{2\pi j f t} dt + a \int_{t_i}^{t_{i+1}} \cos \frac{2\pi t}{T} e^{2\pi j f t} dt + b \int_{t_i}^{t_{i+1}} \cos \frac{4\pi t}{T} e^{2\pi j f t} dt \right] \\ &= -\frac{j}{2D_0} \left\{ \frac{1}{\pi f} (e^{2\pi j f t_{i+1}} - e^{2\pi j f t_i}) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a}{2\pi f + \frac{2\pi}{T}} \left[ e^{(2\pi f + \frac{2\pi}{T})jt_{i+1}} - e^{(2\pi f + \frac{2\pi}{T})jt_i} \right] \\
& + \frac{a}{2\pi f - \frac{2\pi}{T}} \left[ e^{(2\pi f - \frac{2\pi}{T})jt_{i+1}} - e^{(2\pi f - \frac{2\pi}{T})jt_i} \right] \\
& + \frac{b}{2\pi f + \frac{4\pi}{T}} \left[ e^{(2\pi f + \frac{4\pi}{T})jt_{i+1}} - e^{(2\pi f + \frac{4\pi}{T})jt_i} \right] \\
& + \frac{b}{2\pi f - \frac{4\pi}{T}} \left[ e^{(2\pi f - \frac{4\pi}{T})jt_{i+1}} - e^{(2\pi f - \frac{4\pi}{T})jt_i} \right] \Big\} \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Für  $f = 0$  folgt:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t) e^{2\pi jft} dt \\
& = \frac{1}{D_0} \left[ \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt + a \int_{t_i}^{t_{i+1}} \cos \frac{2\pi t}{T} dt + b \int_{t_i}^{t_{i+1}} \cos \frac{4\pi t}{T} dt \right] \\
& = \frac{1}{D_0} \left[ t_{i+1} - t_i \right. \\
& \quad + \frac{aT}{2\pi} \left( \sin \frac{2\pi t_{i+1}}{T} - \sin \frac{2\pi t_i}{T} \right) \\
& \quad \left. + \frac{bT}{4\pi} \left( \sin \frac{4\pi t_{i+1}}{T} - \sin \frac{4\pi t_i}{T} \right) \right] \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Für die Dreieckfensterfunktion gilt:

$$D(t) = \sqrt{3} \left( 1 - \left| 2\frac{t}{T} - 1 \right| \right) \tag{A.15}$$

Dann folgt für  $f \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t) e^{2\pi jft} dt & = 2\sqrt{3} \left[ \int_{\frac{t_i+0,5T}{2} - \left| \frac{t_i-0,5T}{2} \right|}^{\frac{t_{i+1}+0,5T}{2} - \left| \frac{t_{i+1}-0,5T}{2} \right|} \frac{t}{T} e^{2\pi jft} dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{t_i+0,5T}{2} + \left| \frac{t_i+0,5T}{2} \right|}^{\frac{t_{i+1}+0,5T}{2} + \left| \frac{t_{i+1}+0,5T}{2} \right|} \left( 1 - \frac{t}{T} \right) e^{2\pi jft} dt \right] \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$a = \frac{t_i + 0,5T}{2} - \left| \frac{t_i - 0,5T}{2} \right| \quad (\text{A.17})$$

$$b = \frac{t_{i+1} + 0,5T}{2} - \left| \frac{t_{i+1} - 0,5T}{2} \right| \quad (\text{A.18})$$

$$c = \frac{t_i + 0,5T}{2} + \left| \frac{t_i + 0,5T}{2} \right| \quad (\text{A.19})$$

$$d = \frac{t_{i+1} + 0,5T}{2} + \left| \frac{t_{i+1} + 0,5T}{2} \right| \quad (\text{A.20})$$

folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t) e^{2\pi j f t} dt \\ &= 2\sqrt{3} \left[ \frac{1}{T} \int_a^b t e^{2\pi j f t} dt + \int_c^d e^{2\pi j f t} dt + \frac{1}{T} \int_c^d t e^{2\pi j f t} dt \right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi^2 f^2} \left[ \frac{1}{T} (1 - 2\pi j f b) e^{2\pi j f b} - \frac{1}{T} (1 - 2\pi j f a) e^{2\pi j f a} \right. \\ &\quad + 2\pi j f e^{2\pi j f c} - 2\pi j f e^{2\pi j f d} \\ &\quad \left. + \frac{1}{T} (1 - 2\pi j f c) e^{2\pi j f c} - \frac{1}{T} (1 - 2\pi j f d) e^{2\pi j f d} \right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2T\pi^2 f^2} \left[ (1 - 2\pi j f b) e^{2\pi j f b} - (1 - 2\pi j f a) e^{2\pi j f a} \right. \\ &\quad \left. + (1 + 2\pi j f (T - c)) e^{2\pi j f c} - (1 + 2\pi j f (T - d)) e^{2\pi j f d} \right] \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

Für  $f = 0$  und die Substitutionen (A.17) bis (A.20) folgt:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t) e^{2\pi j f t} dt &= 2\sqrt{3} \left[ \frac{1}{T} \int_a^b t dt + \int_c^d dt - \frac{1}{T} \int_c^d t dt \right] \\ &= 2\sqrt{3} \left[ \frac{1}{2T} (b^2 - a^2) + (d - c) - \frac{1}{2T} (d^2 - c^2) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{T}(b^2 - a^2) + 2\sqrt{3}(d - c) - \frac{\sqrt{3}}{T}(d^2 - c^2) \quad (\text{A.22})$$

#### A.4 Ausgewählte Integrale

$$\begin{aligned} & \int \cos^2 \frac{2n\pi t}{T} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi t}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T} + t \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{4n\pi} \sin \frac{4\pi t}{T} + t \right] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \cos^2 \frac{2n\pi t}{T} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{4n\pi} \sin \frac{4\pi t}{T} + t \right]_0^T \\ &= \frac{T}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} & \int \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \\ &= \frac{T}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi t}{T} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \\ &= \left[ \frac{T}{2n\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right]_0^T \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} & \int \cos \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{4\pi t}{T} dt \\ &= \int \cos \frac{2\pi t}{T} \left( 2 \cos^2 \frac{2\pi t}{T} - 1 \right) dt \\ &= 2 \int \cos^3 \frac{2\pi t}{T} dt - \int \cos \frac{2\pi t}{T} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \left[ \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \cos^2 \frac{2\pi t}{T} + 2 \int \cos \frac{2\pi t}{T} dt \right] - \int \cos \frac{2\pi t}{T} dt \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{T}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \cos^2 \frac{2\pi t}{T} + \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right] \tag{A.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \cos \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{4\pi t}{T} dt \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{T}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \cos^2 \frac{2\pi t}{T} + \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right]_0^T \\
&= 0 \tag{A.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int \left( \frac{t}{T} \right)^2 dt \\
&= \frac{T}{3} \left( \frac{t}{T} \right)^3 \tag{A.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{T}{2}} \left( \frac{t}{T} \right)^2 dt \\
&= \frac{T}{3} \left[ \left( \frac{t}{T} \right)^3 \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{T}{24} \tag{A.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int \cos \frac{n\pi t}{T} e^{2\pi jft} dt \\
&= \int \cos 2\pi ft \cos \frac{n\pi t}{T} dt + j \int \sin 2\pi ft \cos \frac{n\pi t}{T} dt \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin \left[ \left( 2\pi f + \frac{n\pi}{T} \right) t \right]}{2\pi f + \frac{n\pi}{T}} + \frac{\sin \left[ \left( 2\pi f - \frac{n\pi}{T} \right) t \right]}{2\pi f - \frac{n\pi}{T}} \right\} \\
&\quad - \frac{j}{2} \left\{ \frac{\cos \left[ \left( 2\pi f + \frac{n\pi}{T} \right) t \right]}{2\pi f + \frac{n\pi}{T}} + \frac{\cos \left[ \left( 2\pi f - \frac{n\pi}{T} \right) t \right]}{2\pi f - \frac{n\pi}{T}} \right\} \\
&= -\frac{j}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi f + \frac{n\pi}{T}} e^{j(2\pi f + \frac{n\pi}{T})t} + \frac{1}{2\pi f - \frac{n\pi}{T}} e^{j(2\pi f - \frac{n\pi}{T})t} \right\} \tag{A.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \cos \frac{n\pi t}{T} e^{2\pi jft} dt \\
&= -\frac{j}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi f + \frac{n\pi}{T}} \left[ e^{j(2\pi f + \frac{n\pi}{T})b} - e^{j(2\pi f + \frac{n\pi}{T})a} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi f - \frac{n\pi}{T}} \left[ e^{j(2\pi f - \frac{n\pi}{T})b} - e^{j(2\pi f - \frac{n\pi}{T})a} \right] \right\} \tag{A.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int te^{2\pi jft} dt \\
&= \frac{1}{2\pi jf} \left[ te^{2\pi jft} - \int e^{2\pi jft} dt \right] \\
&= \frac{1}{2\pi jf} \left[ te^{2\pi jft} - \frac{1}{2\pi jf} e^{2\pi jft} \right] \\
&= \frac{-j}{2\pi f} te^{2\pi jft} + \frac{1}{4\pi^2 f^2} e^{2\pi jft} \\
&= \frac{1 - 2\pi jft}{4\pi^2 f^2} e^{2\pi jft} \tag{A.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b te^{2\pi jft} dt \\
&= \frac{1 - 2\pi jfb}{4\pi^2 f^2} e^{2\pi jfb} - \frac{1 - 2\pi jfa}{4\pi^2 f^2} e^{2\pi jfa} \tag{A.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int e^{2\pi jft} dt \\
&= \frac{1}{2\pi jf} e^{2\pi jft} \\
&= -\frac{2\pi jf}{4\pi^2 f^2} e^{2\pi jft} \tag{A.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b e^{2\pi jft} dt \\
&= \frac{2\pi jf}{4\pi^2 f^2} \left[ e^{2\pi jfa} - e^{2\pi jfb} \right] \tag{A.36}
\end{aligned}$$

## B Parameter des Simulationsprogramms

### Grundserie 1D

Varianz integrales Zeitmaß	Varianz der Strömungsgeschwindigkeit in $\frac{m^2}{s^2}$ integrales Zeitmaß der Strömungsgeschwindigkeit in $s$
Punkte je int. Zeitmaß	Anzahl der Samples pro integralem Zeitmaß der Strömungsgeschwindigkeit in $\frac{1}{\vartheta}$
Meßzeit (in int. Zeitmaßen)	Meßzeit in Vielfachen des integralen Zeitmaßes der Strömungsgeschwindigkeit (einheitenlos)
mittlere Geschwindigkeit	mittlere Strömungsgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$

### Grundserie 3D

Kovarianzen	(Matrix) Auto- und Kreuzkovarianzen der Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in $\frac{m^2}{s^2}$
integrales Zeitmaß	(Matrix; nur Hauptdiagonale vorgebbar) integrale Zeitmaße der Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in $s$
Punkte je int. Zeitmaß	(Matrix; nur Wert für Meßrichtung vorgebbar) Anzahl der Samples pro integralem Zeitmaß der Meßkomponente der Strömungsgeschwindigkeit in $\frac{1}{\vartheta_{uu}}$
Meßzeit (in int. Zeitmaßen)	(Matrix; nur Wert für Meßrichtung vorgebbar) Meßzeit in Vielfachen des integralen Zeitmaßes der Meßkomponente der Strömungsgeschwindigkeit (einheitenlos)
mittlere Geschwindigkeit	(Vektor) mittlere Strömungsgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$

## Teilchenserie 1D/3D

Ausdehnung des Meßvolumens	Ausdehnung des Meßvolumens in Meßrichtung (Vollachse) in $m$
x (Meßrichtung)	(nur 3D)
y	Meßvolumenausdehnung senkrecht zur Meßrichtung und senkrecht zur optischen Achse (Vollachse) in $m$
z (optische Achse)	(nur 3D)
mittl. Teilchenrate	Meßvolumenausdehnung in Richtung der optischen Achse (Vollachse) in $m$
Abhängigkeit der Teilchenr.	mittlere Teilchenrate in $\frac{1}{\vartheta}$
	(nur 3D)
	Die Teilchenrate wird als Funktion von einem gewichteten Betrag der Strömungsgeschwindigkeit nach
	$ \vec{v}_{gew}(t)  = \sqrt{k_u^2 u^2 + k_v^2 v^2 + k_w^2 w^2}$
x-Richtung	Abhängigkeit der Teilchenrate von der u-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit
y-Richtung	dto. v-Komponente
z-Richtung	dto. w-Komponente
Anstieg (Betrag)	Anstieg der Teilchenrate in $\frac{\vartheta^{-1}}{ms^{-1}}$
Geschwindigkeit beim Sprung	Geschwindigkeit bei der ein Teilchenraten-sprung auftritt in $\frac{m}{s}$
min. Teilchenrate	minimale Teilchenrate in $\frac{1}{\vartheta}$
max. Teilchenrate	maximale Teilchenrate in $\frac{1}{\vartheta}$
Teilchenratenhub	Änderung der Teilchenrate beim Sprung in $\frac{1}{\vartheta}$
Grundserie	
Teilbereich	
von	Anfangszeit in Vielfachen des integralen Zeitmaßes (einheitenlos)
bis	Endzeit in Vielfachen des integralen Zeitmaßes (einheitenlos)

### Prozessorserie 1D/3D

Minimum der Perioden	Anzahl der zur Meßwertgewinnung nötigen Perioden (einheitenlos)
Maximum der Perioden	Anzahl der Perioden, nach der der Prozessor zurückgesetzt wird (einheitenlos)
Rücksetzdelaytime	Totzeit zum Rücksetzen des Prozessors in $s$
Interferenzstreifenabstand	in $m$
Shiftfrequenz	in $Hz$
Übertragungsdelaytime	Totzeit zum Übertragen eines Meßwertes an einen Rechner in $s$
Pufferlänge	Anzahl der zwischenspeichernden Meßwerte (einheitenlos)
Abtastfrequenz	Frequenz mit der ein getakteter Prozessor abgefragt wird oder mit der ein Datensatz abgetastet wird in $Hz$

### Spektral-Schätzung

Resamplingfreq.	Frequenz mit der ein Datensatz äquidistant abgetastet wird in $\frac{1}{\vartheta}$
Blocklänge	Anzahl der Samples pro Block (einheitenlos) bzw. Meßzeit eines Blocks in $\vartheta$
Mittelungen	Anzahl der zur Blockmittelung heranzuziehenden Blöcke (einheitenlos)
min. Freq.	minimale zu analysierende Frequenz in $\frac{1}{\vartheta}$
max. Freq.	maximale zu analysierende Frequenz in $\frac{1}{\vartheta}$
Anzahl	Anzahl der Stützstellen im Frequenzbereich [min. Freq.; max. Freq.] (einheitenlos)

## C Ausgewählte Ergebnisse zu Untersuchungen der Schätzalgorithmen

Übersicht über die Spektralschätzungen:

Abb.	von	$TU$	$N_D$	Methode	Fensterfkt.	Wichtung
C.1	GS	100%	–	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.2	GS	100%	–	Rek. und Res.	Dreieck	–
C.3	GS	100%	–	Rek. und Res.	Hanning	–
C.4	GS	100%	–	Rek. und Res.	Hamming	–
C.5	GS	100%	–	Rek. und Res.	Blackman	–
C.6	GS	100%	–	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.7	GS	100%	–	Rek. und DFT	Dreieck	–
C.8	GS	100%	–	Rek. und DFT	Hanning	–
C.9	GS	100%	–	Rek. und DFT	Hamming	–
C.10	GS	100%	–	Rek. und DFT	Blackman	–
C.11	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	keine
C.12	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	DT
C.13	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	TA
C.14	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	VW
C.15	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	SH
C.16	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	NA
C.17	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Dreieck	keine
C.18	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Hanning	keine
C.19	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Hamming	keine
C.20	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Blackman	keine
C.21	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	keine
C.22	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	DT
C.23	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	TA
C.24	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	VW
C.25	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	SH
C.26	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	NA
C.27	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Dreieck	keine
C.28	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Hanning	keine
C.29	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Hamming	keine
C.30	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Blackman	keine

Abb.	von	$TU$	$N_D$	Methode	Fensterfkt.	Wichtung
C.31	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.32	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Dreieck	–
C.33	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Hanning	–
C.34	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Hamming	–
C.35	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Blackman	–
C.36	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.37	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Dreieck	–
C.38	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Hanning	–
C.39	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Hamming	–
C.40	TS	100%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Blackman	–
C.41	TS	100%	$10\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	keine
C.42	TS	100%	$10\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	keine
C.43	TS	100%	$10\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.44	TS	100%	$10\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.45	TS	100%	$1\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	keine
C.46	TS	100%	$1\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	keine
C.47	TS	100%	$1\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.48	TS	100%	$1\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.49	GS	300%	–	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.50	GS	300%	–	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.51	TS	300%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	keine
C.52	TS	300%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	keine
C.53	TS	300%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.54	TS	300%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.55	TS	300%	$10\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	keine
C.56	TS	300%	$10\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	keine
C.57	TS	300%	$10\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.58	TS	300%	$10\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.59	TS	300%	$1\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	keine
C.60	TS	300%	$1\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	keine

Abb.	von	$TU$	$N_D$	Methode	Fensterfkt.	Wichtung
C.61	TS	300%	$1\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.62	TS	300%	$1\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.63	GS	10%	–	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.64	GS	10%	–	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.65	TS	10%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	keine
C.66	TS	10%	$50\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	keine
C.67	TS	10%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.68	TS	10%	$50\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.69	TS	10%	$10\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	keine
C.70	TS	10%	$10\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	keine
C.71	TS	10%	$10\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.72	TS	10%	$10\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Rechteck	–
C.73	TS	10%	$1\vartheta^{-1}$	Kov. mit Biask.	Rechteck	keine
C.74	TS	10%	$1\vartheta^{-1}$	Kov. ohne Biask.	Rechteck	keine
C.75	TS	10%	$1\vartheta^{-1}$	Rek. und Res.	Rechteck	–
C.76	TS	10%	$1\vartheta^{-1}$	Rek. und DFT	Rechteck	–

Hierbei bedeuten:

GS	Grundserie
TS	Teilchenserie
Rek. und Res.	Rekonstruktion und Resampling
Rek. und DFT	Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral)
Kov. mit Biask.	Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Korrektur des durch die Abtastfunktion verursachten Bias
Kov. ohne Biask.	Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Korrektur des durch die Abtastfunktion verursachten Bias
DT	Zeitdifferenzwichtung
TA	Aufenthaltszeitwichtung
VW	Geschwindigkeitswichtung
SH	Sample-&-Hold-Wichtung
NA	Wichtung nach Nako

In den Diagrammen ist jeweils die in obiger Tabelle enthaltene spektrale Leistungsdichte durch Sternchen gekennzeichnet.

Die Linie ohne Kennzeichnung ist die Vergleichsleistungsdichte. Diese ist für die Schätzung der Leistungsdichte der Grundserie die Leistungsdichte des Signalmodells.

Schätzmethode	Vergleichsmodell
Rekonstruktion und Resampling	Abtastmodell
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral)	kontinuierliches Modell
Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Korrektur des durch die Abtastfunktion verursachten Bias	kontinuierliches Modell
Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Korrektur des durch die Abtastfunktion verursachten Bias	kontinuierliches Modell

Als Referenz für die Leistungsdichteschätzung der Teilchenserie wird die Realisierung der Leistungsdichteschätzung der zugrundeliegenden Grundserie mittels der gleichen Methode und Fensterfunktion verwendet.

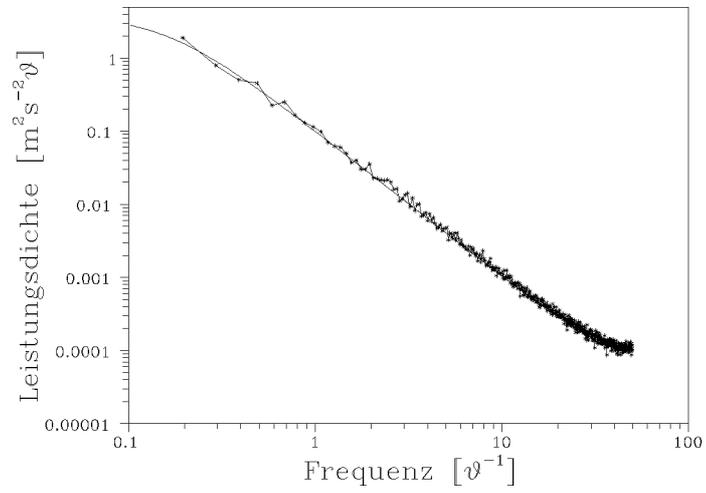


Abbildung C.1: Grundserie  $TU = 100\%$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

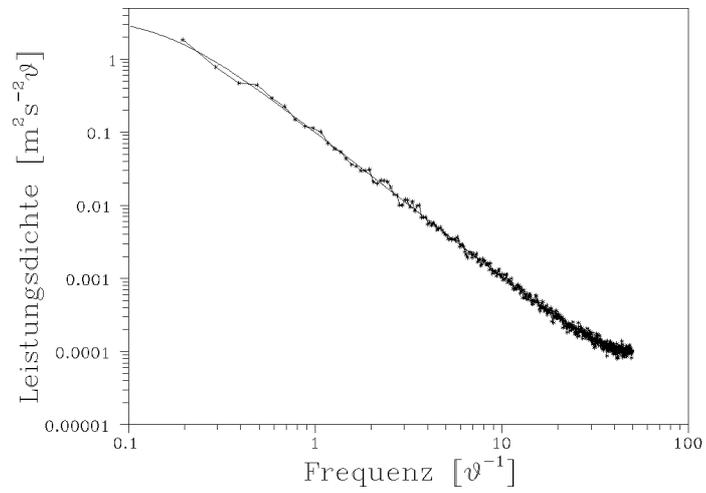


Abbildung C.2: Grundserie  $TU = 100\%$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Dreieckfenster

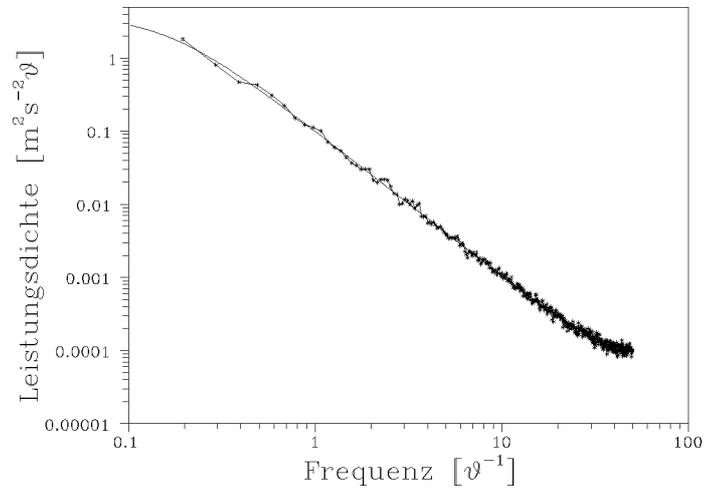


Abbildung C.3: Grundserie  $TU = 100\%$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Hanning-Fenster

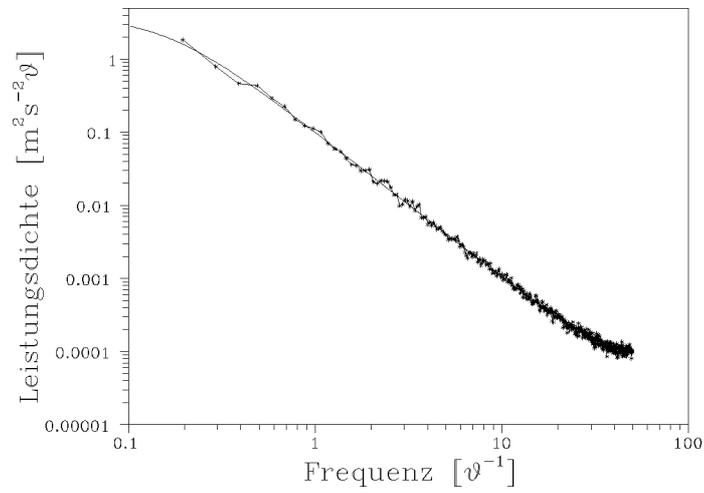


Abbildung C.4: Grundserie  $TU = 100\%$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Hamming-Fenster

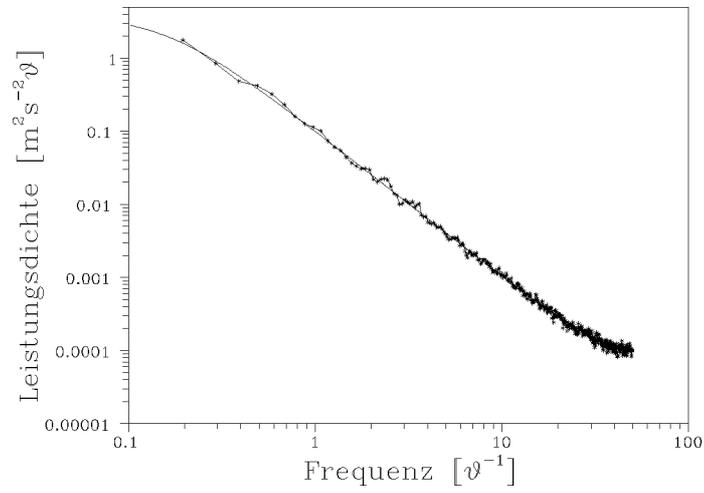


Abbildung C.5: Grundserie  $TU = 100\%$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Blackman-Fenster

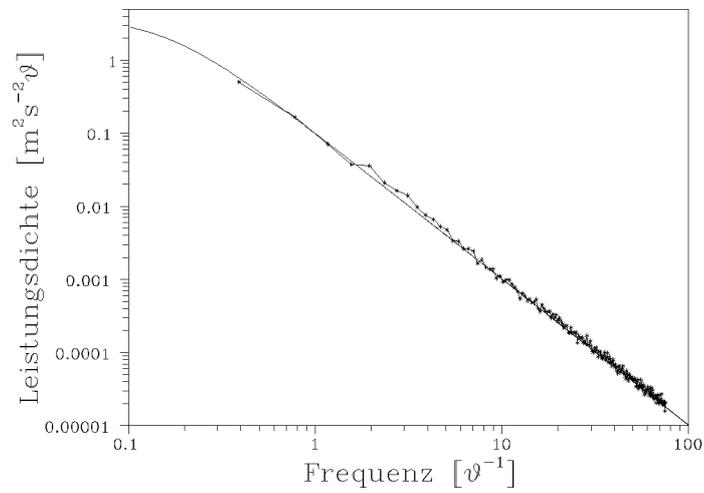


Abbildung C.6: Grundserie  $TU = 100\%$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

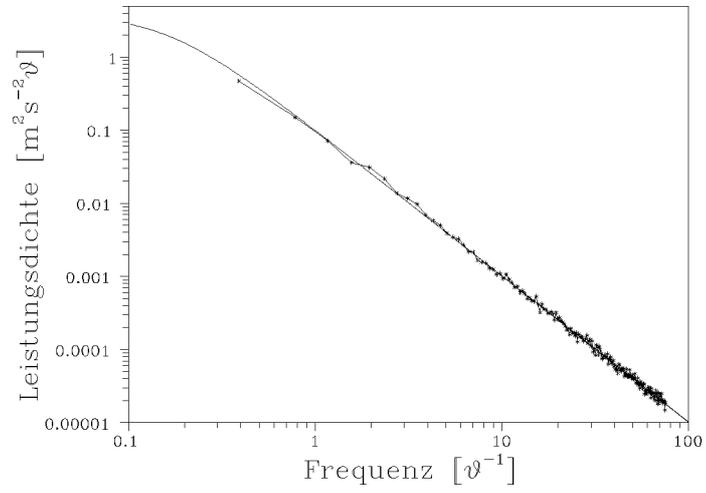


Abbildung C.7: Grundserie  $TU = 100\%$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Dreieckfenster

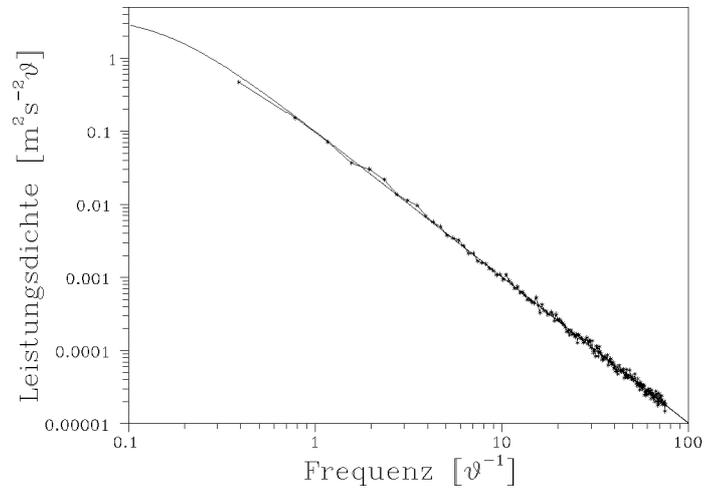


Abbildung C.8: Grundserie  $TU = 100\%$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Hanning-Fenster

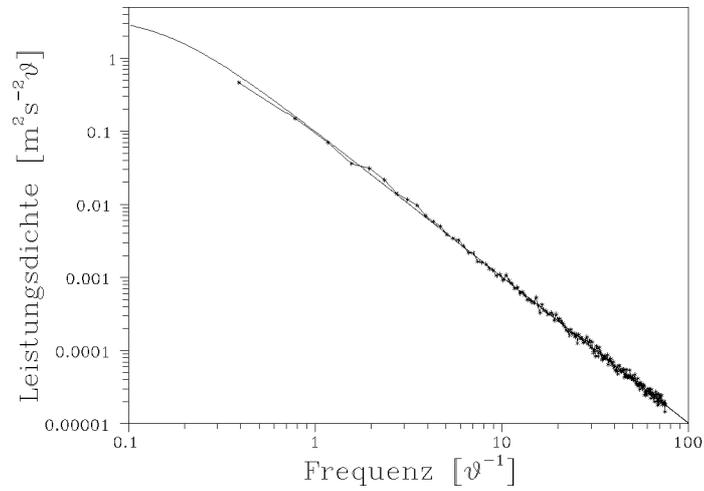


Abbildung C.9: Grundserie  $TU = 100\%$ ,  
 Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Hamming-  
 Fenster

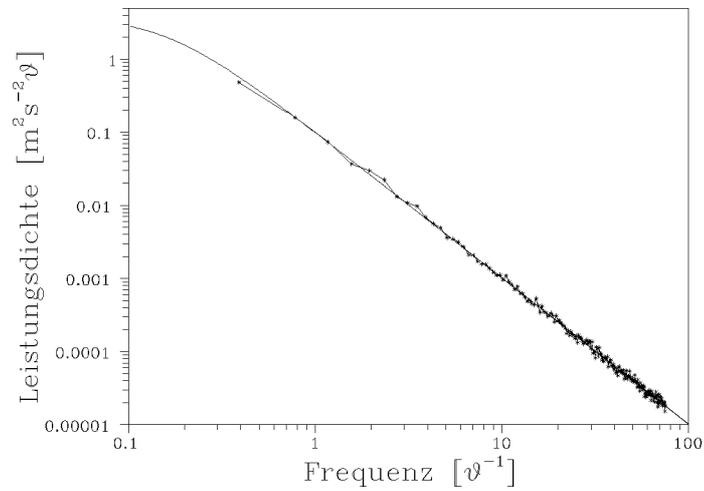


Abbildung C.10: Grundserie  $TU = 100\%$ ,  
 Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Blackman-  
 Fenster

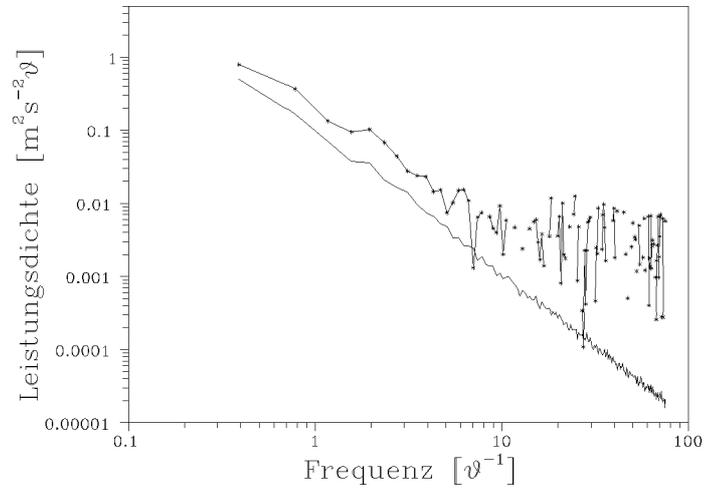


Abbildung C.11: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

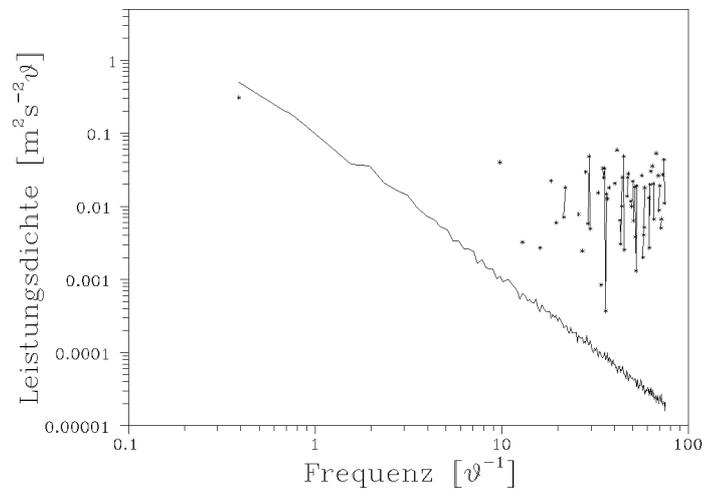


Abbildung C.12: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, Zeitdifferenzwichtung

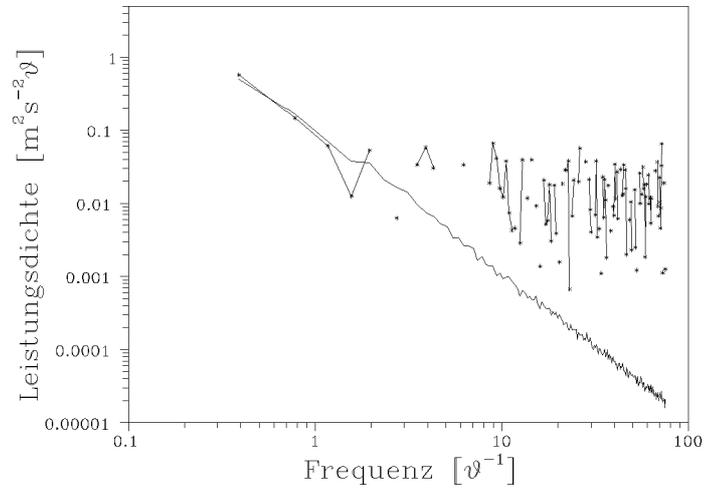


Abbildung C.13: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, Aufenthaltszeitwichtung

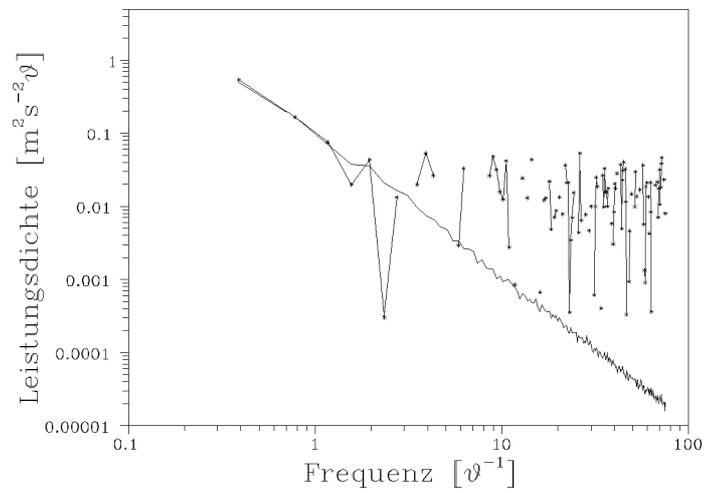


Abbildung C.14: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, Geschwindigkeitswichtung

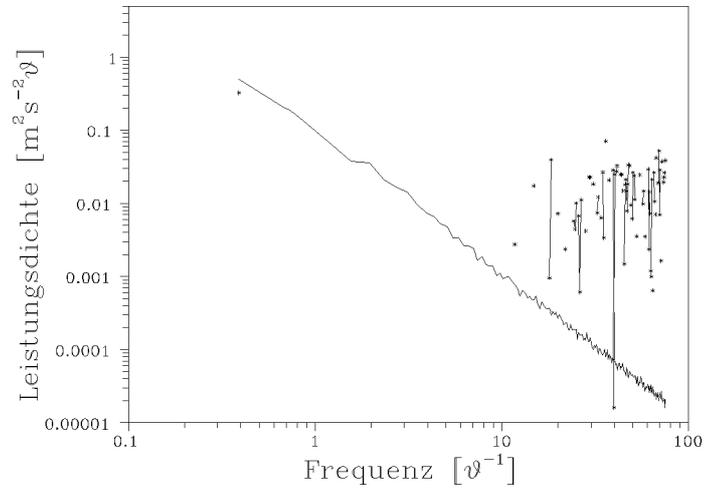


Abbildung C.15: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, Sample-&-Hold-Wichtung

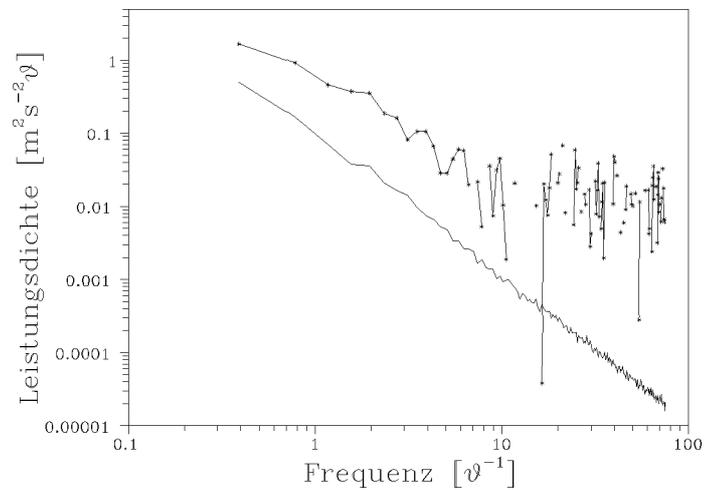


Abbildung C.16: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, Wichtung nach Nakao

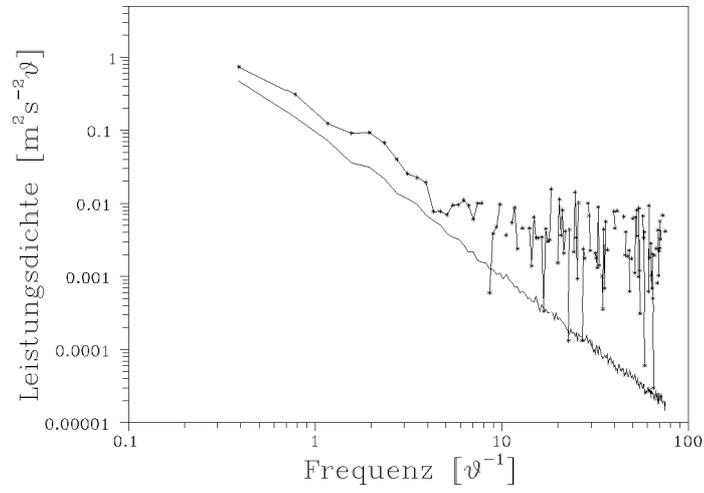


Abbildung C.17: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Dreieckfenster, keine Wichtung

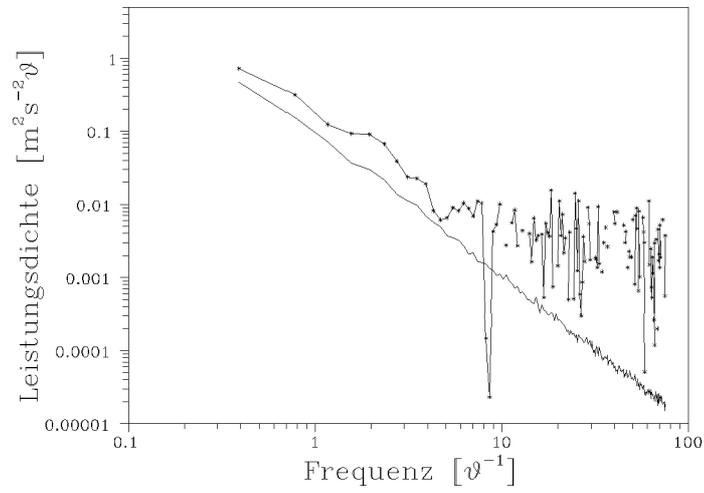


Abbildung C.18: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Hanning-Fenster, keine Wichtung

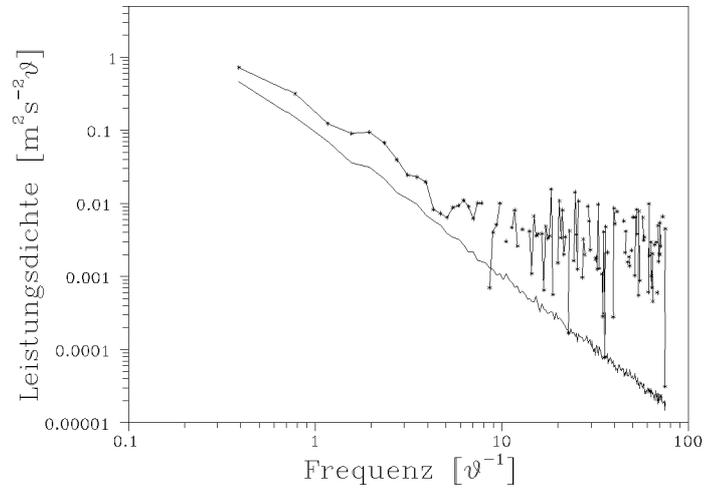


Abbildung C.19: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Hamming-Fenster, keine Wichtung

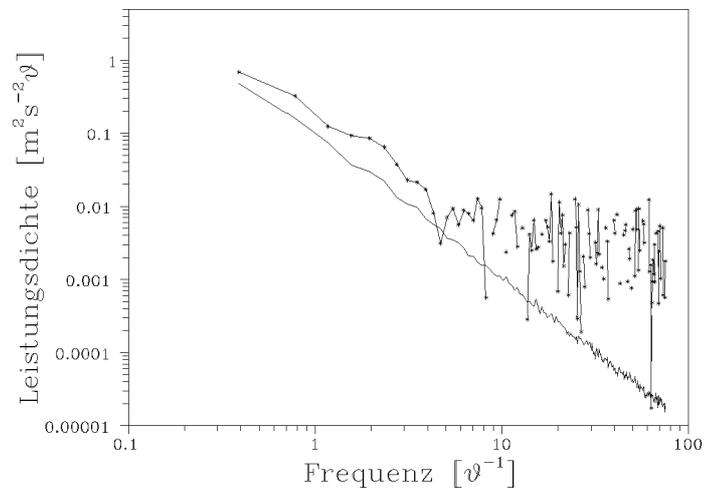


Abbildung C.20: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Blackman-Fenster, keine Wichtung

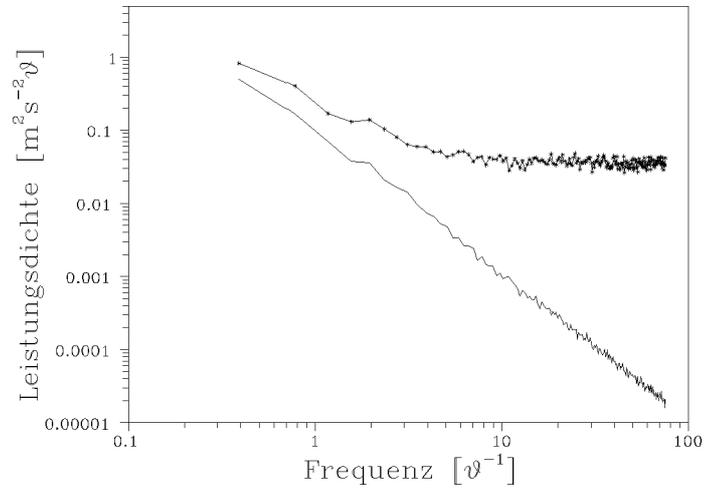


Abbildung C.21: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

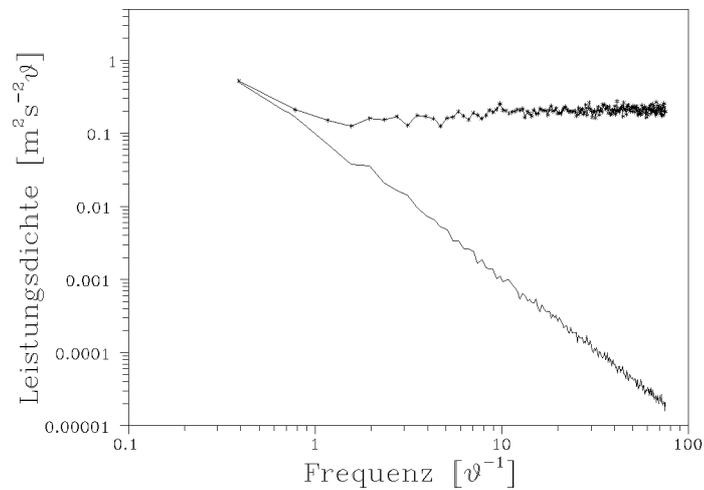


Abbildung C.22: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, Zeitdifferenzwichtung

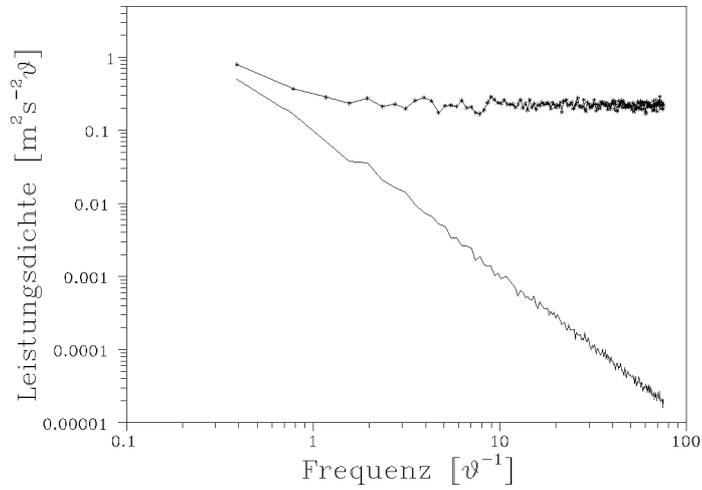


Abbildung C.23: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, Aufenthaltszeitwichtung

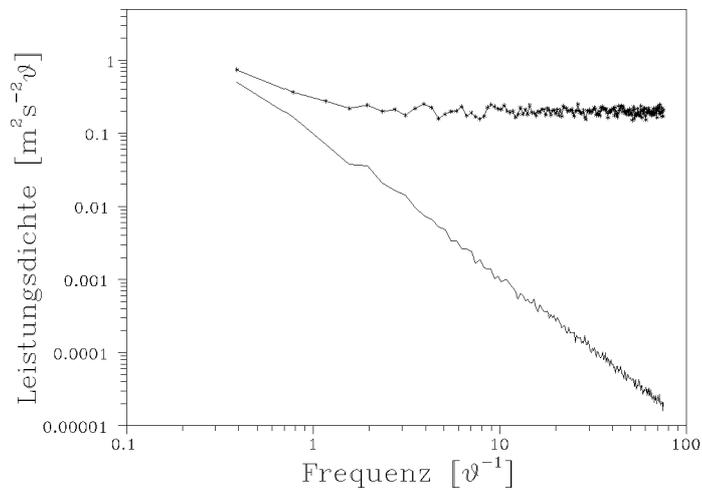


Abbildung C.24: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, Geschwindigkeitswichtung

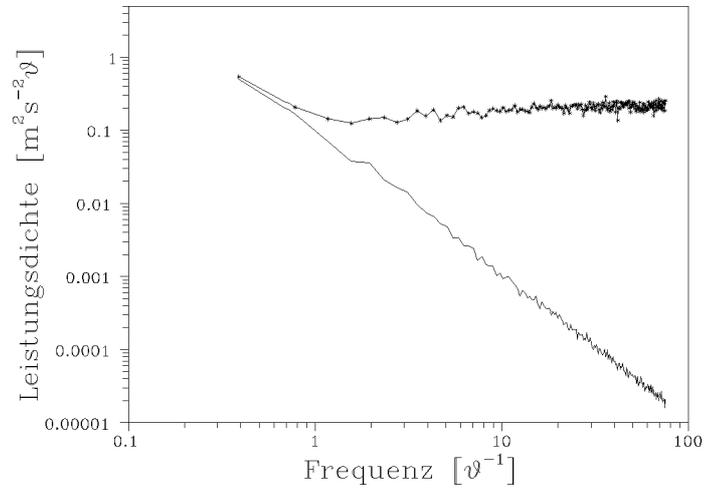


Abbildung C.25: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, Sample-&-Hold-Wichtung

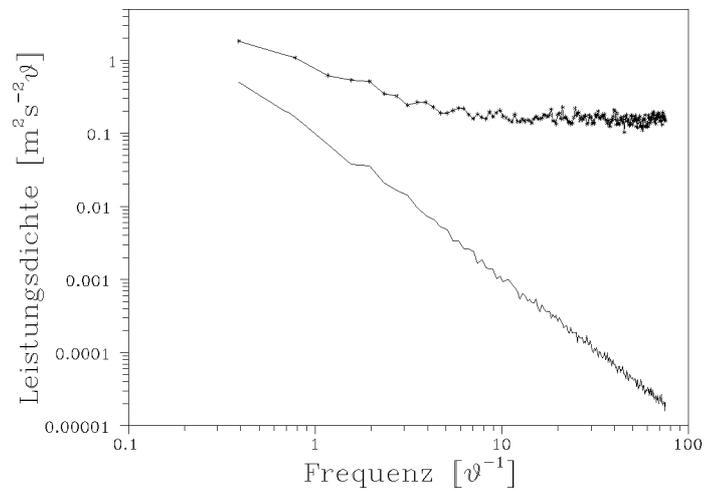


Abbildung C.26: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, Wichtung nach Nakao

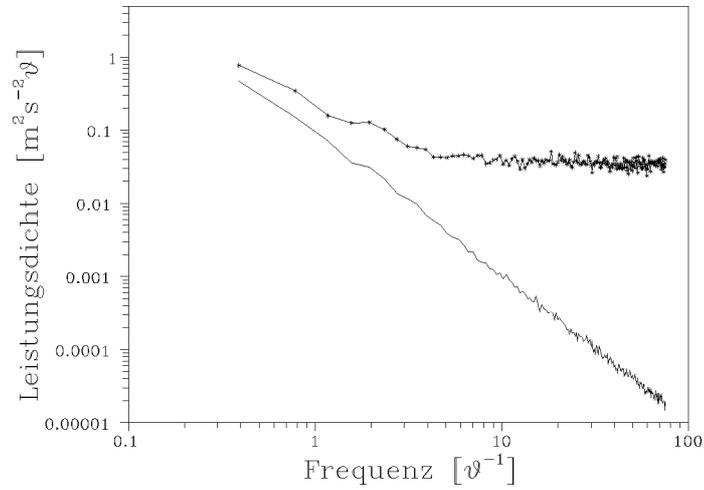


Abbildung C.27: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Dreieckfenster, keine Wichtung

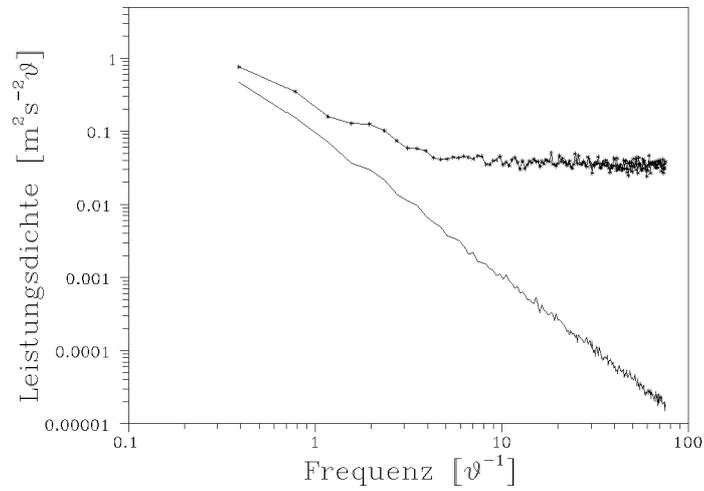


Abbildung C.28: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Hanning-Fenster, keine Wichtung

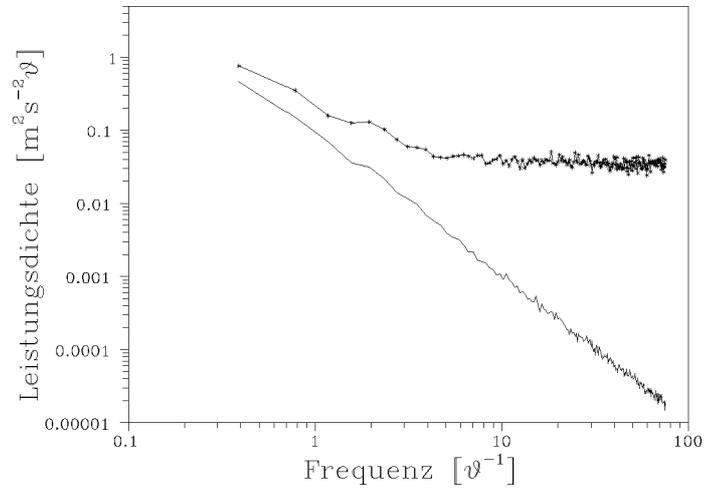


Abbildung C.29: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Hamming-Fenster, keine Wichtung

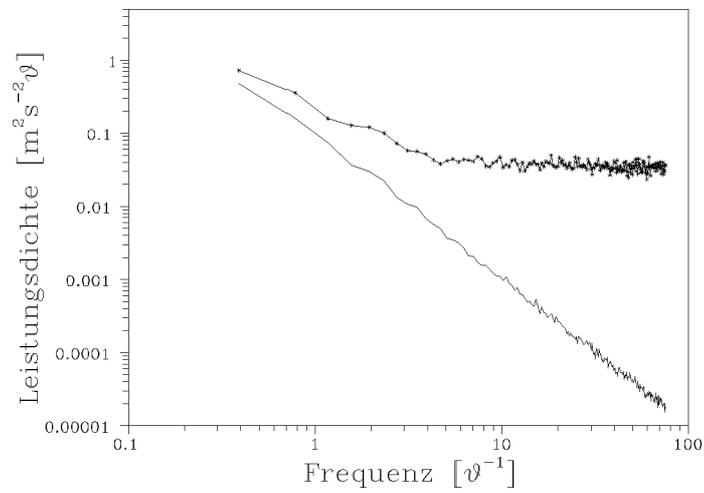


Abbildung C.30: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Blackman-Fenster, keine Wichtung

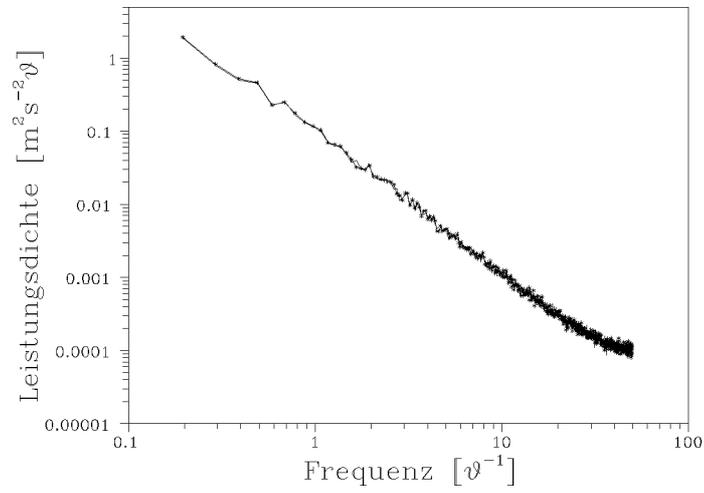


Abbildung C.31: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

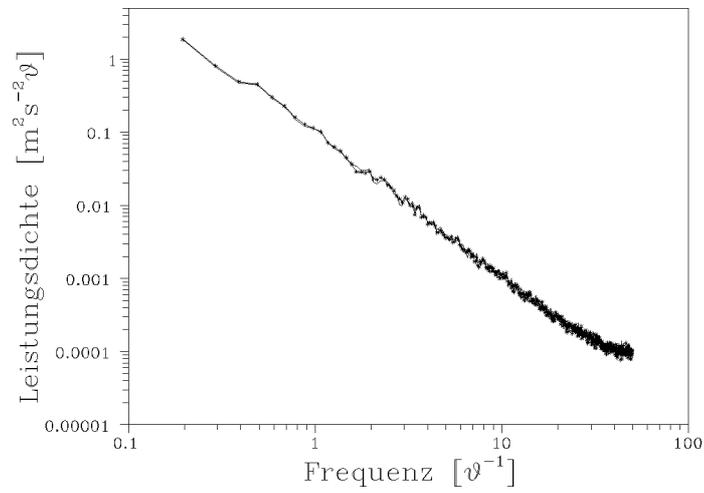


Abbildung C.32: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Dreieckfenster

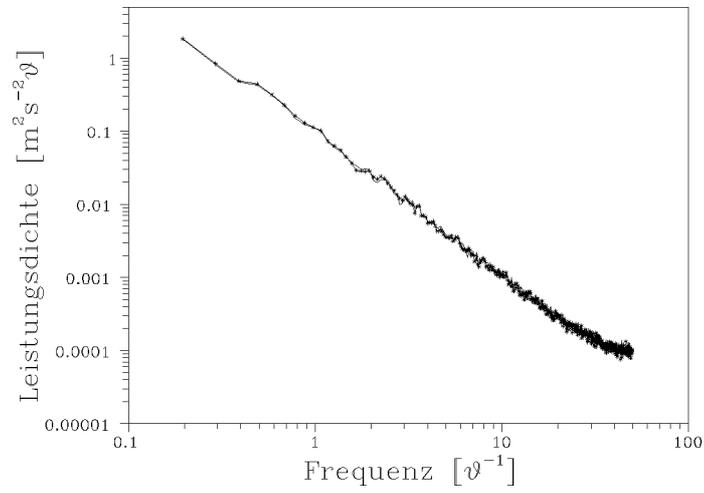


Abbildung C.33: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Hanning-Fenster

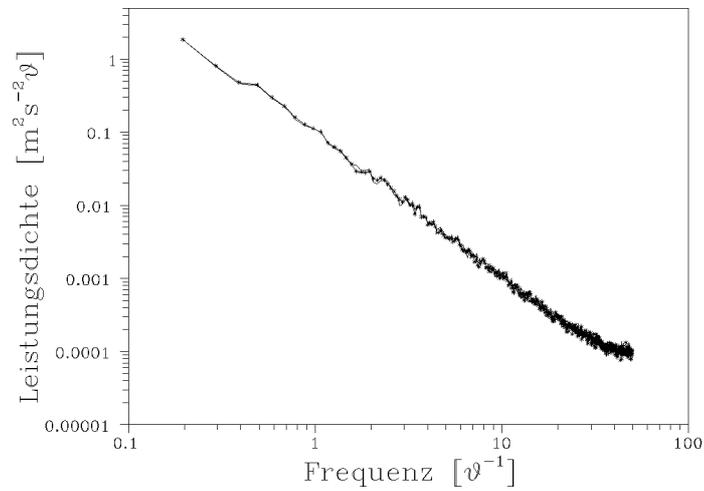


Abbildung C.34: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Hamming-Fenster

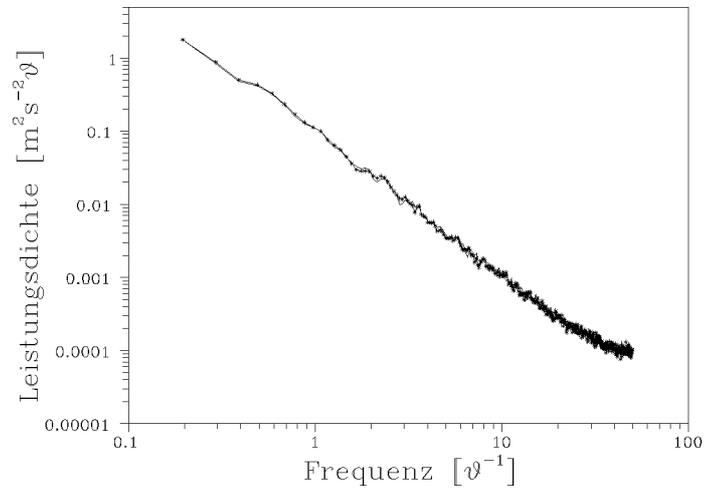


Abbildung C.35: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50v^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Blackman-Fenster

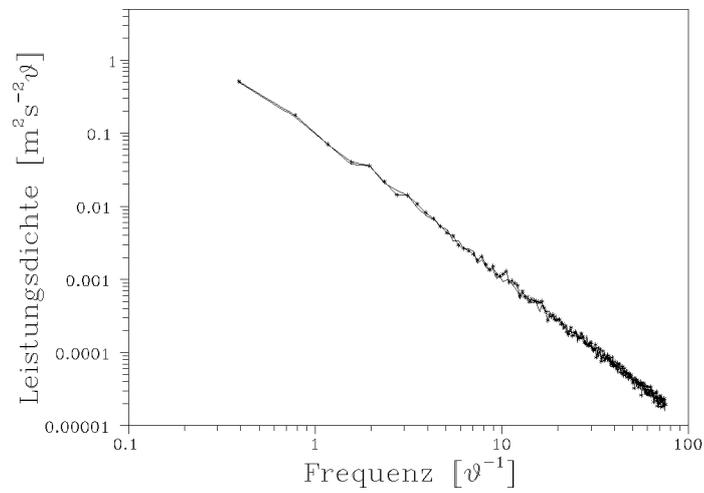


Abbildung C.36: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50v^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

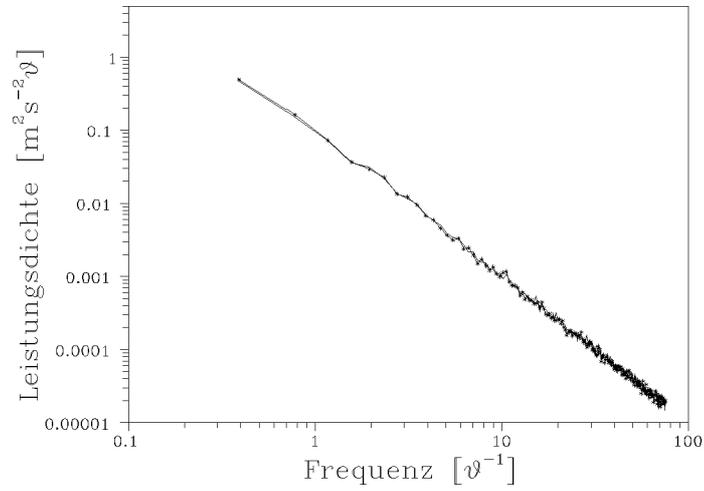


Abbildung C.37: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Dreieckfenster

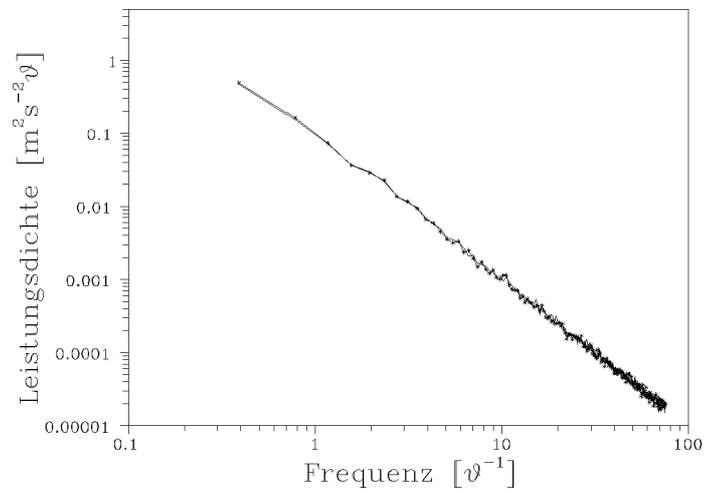


Abbildung C.38: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Hanning-  
Fenster

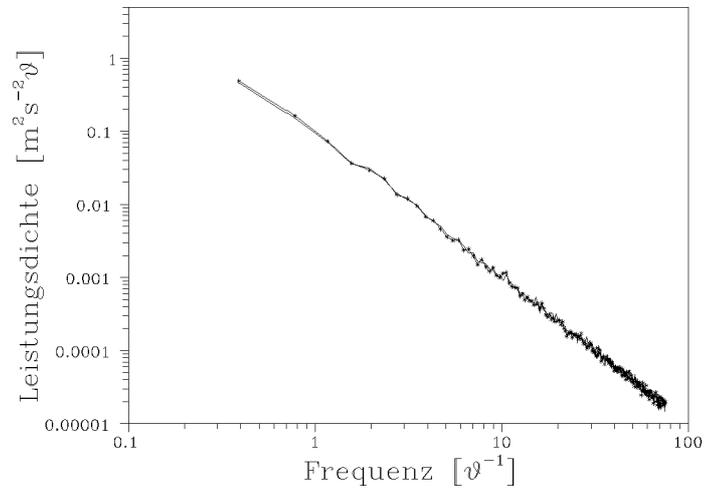


Abbildung C.39: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Hamming-  
Fenster

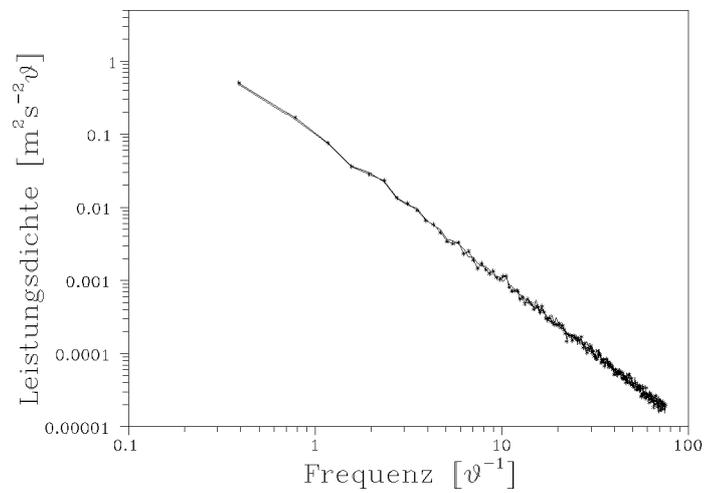


Abbildung C.40: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Blackman-  
Fenster

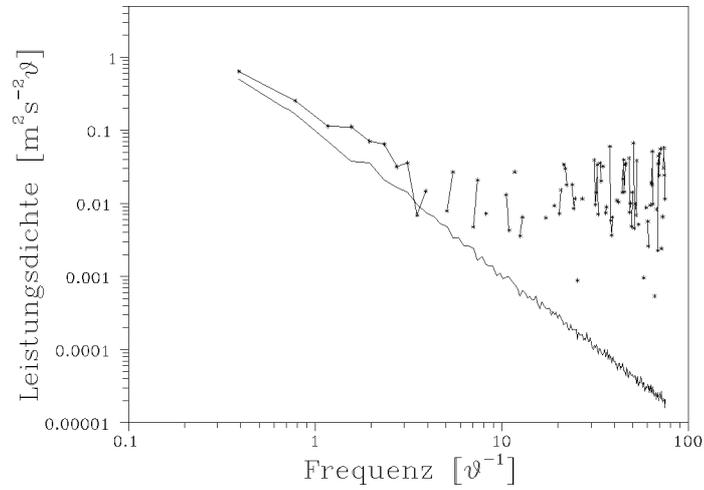


Abbildung C.41: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

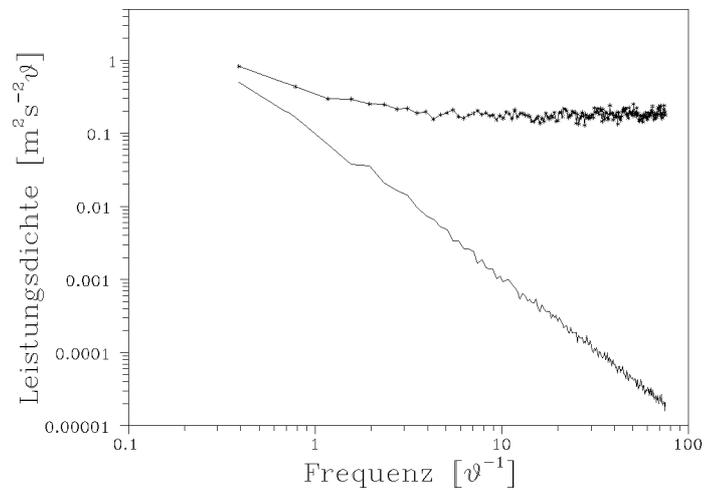


Abbildung C.42: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

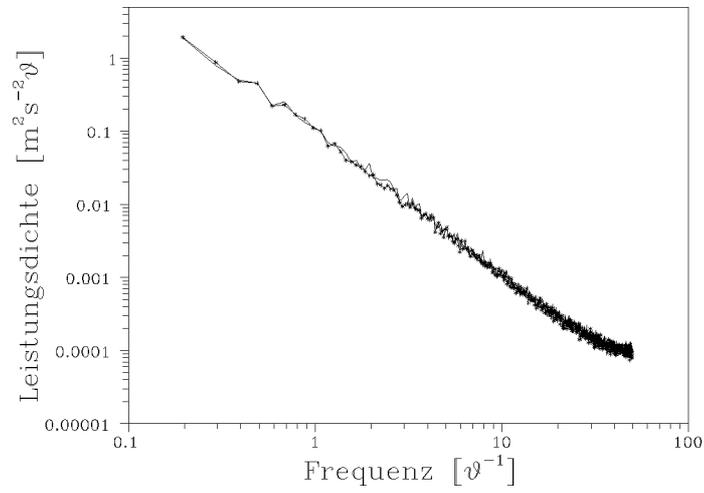


Abbildung C.43: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

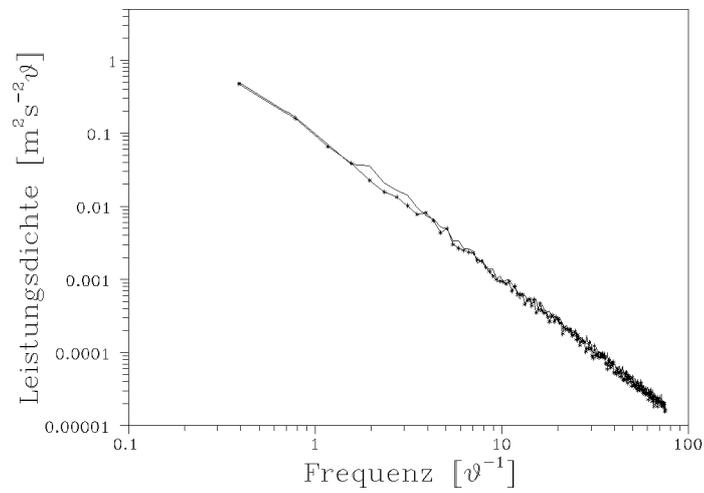


Abbildung C.44: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

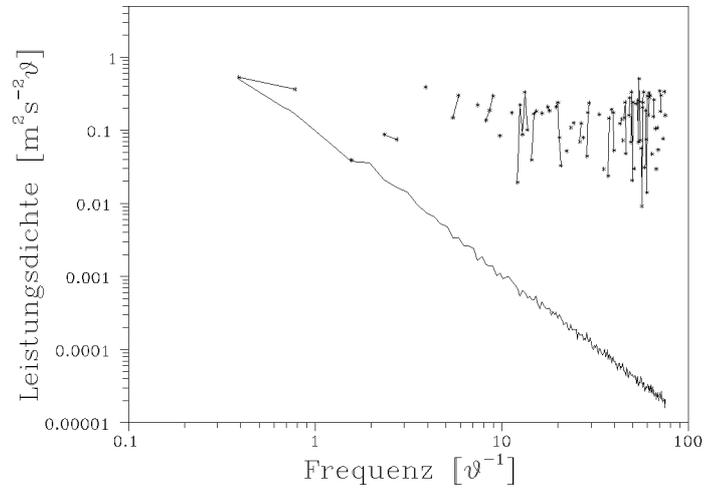


Abbildung C.45: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 1\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

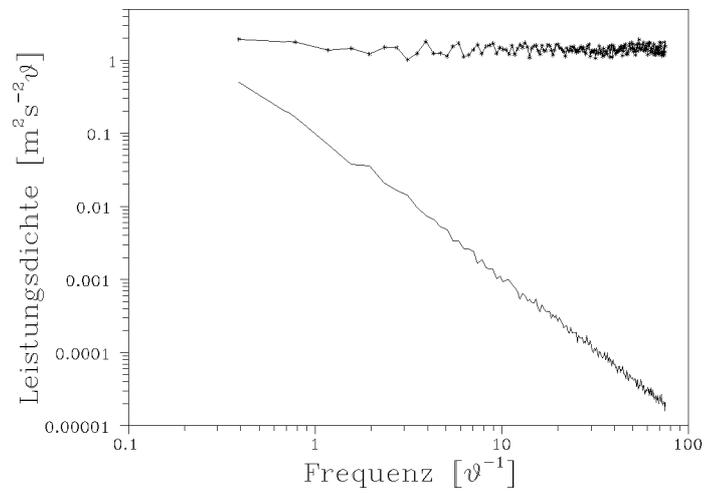


Abbildung C.46: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 1\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

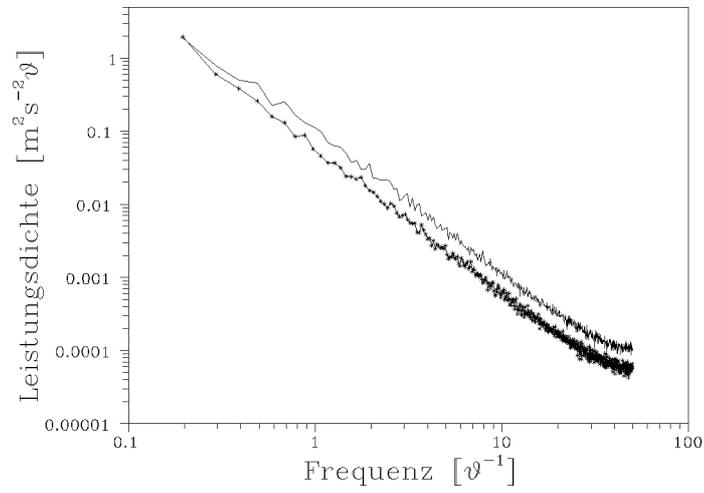


Abbildung C.47: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 1\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

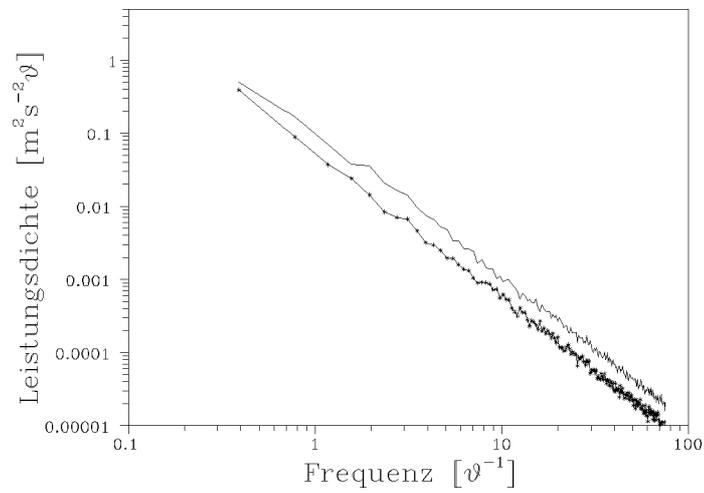


Abbildung C.48: Teilchenserie  $TU = 100\%$ ,  $N_D = 1\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

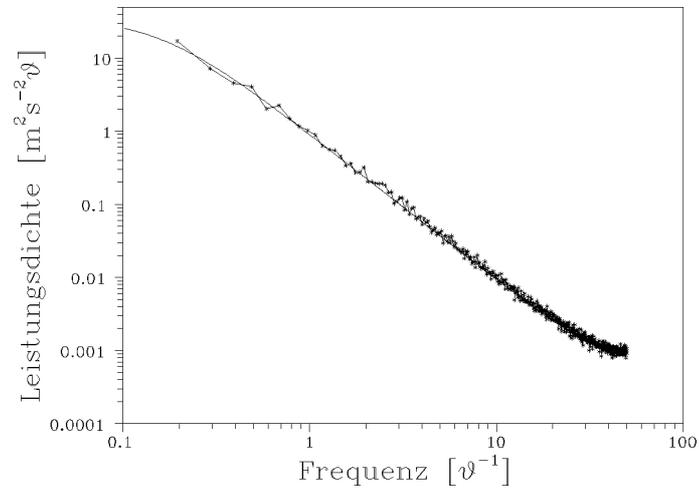


Abbildung C.49: Grundserie  $TU = 300\%$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

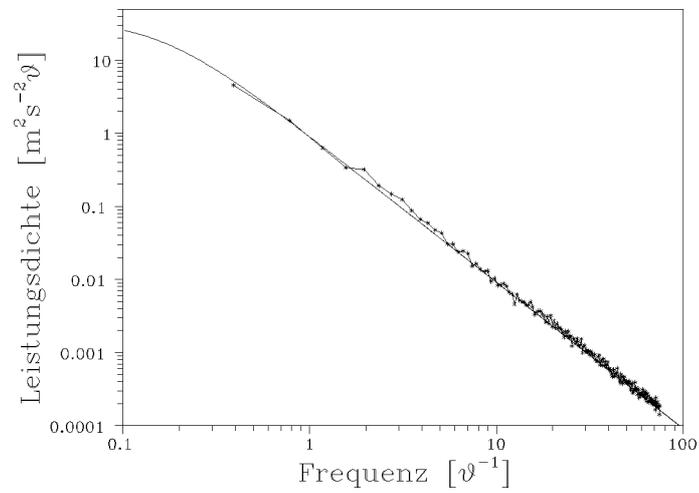


Abbildung C.50: Grundserie  $TU = 300\%$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

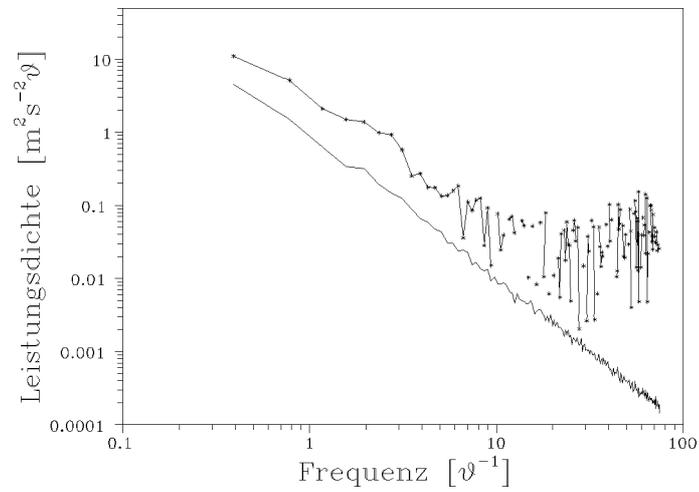


Abbildung C.51: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

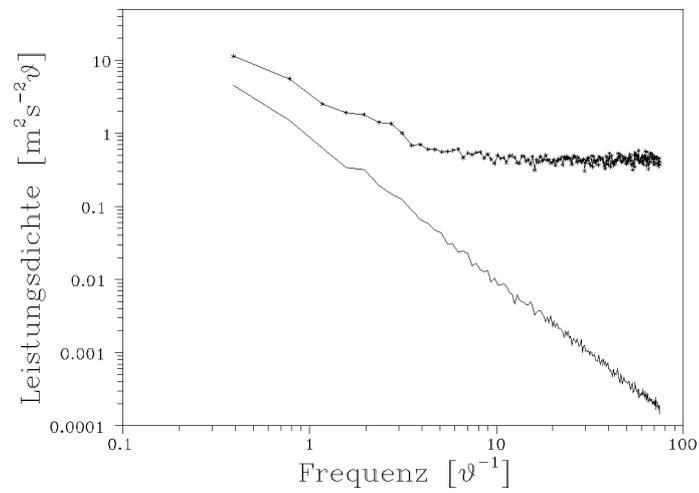


Abbildung C.52: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

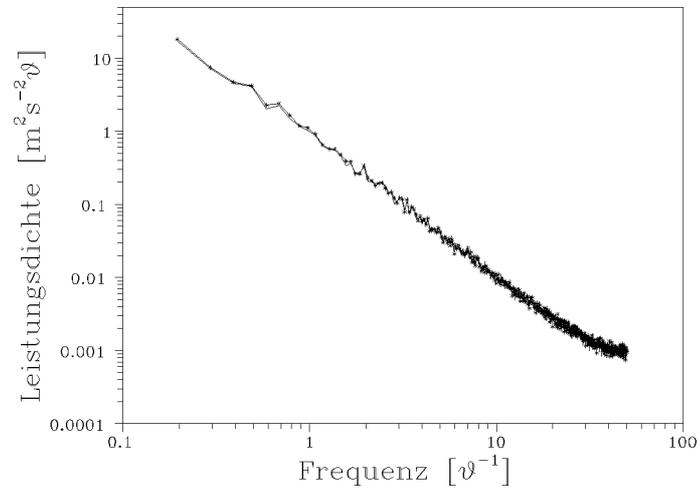


Abbildung C.53: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

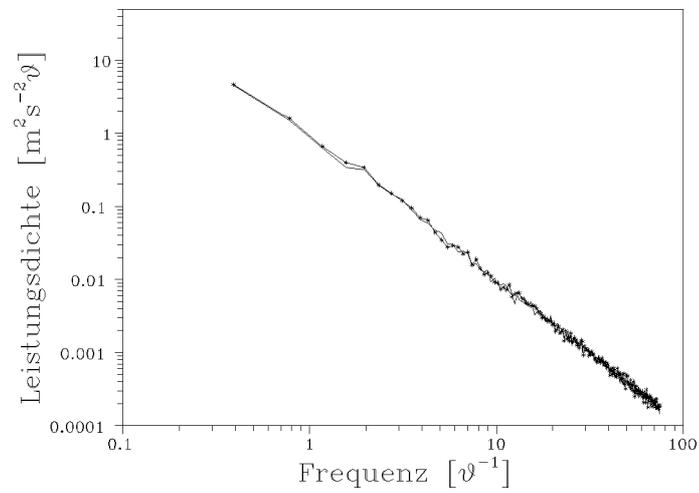


Abbildung C.54: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

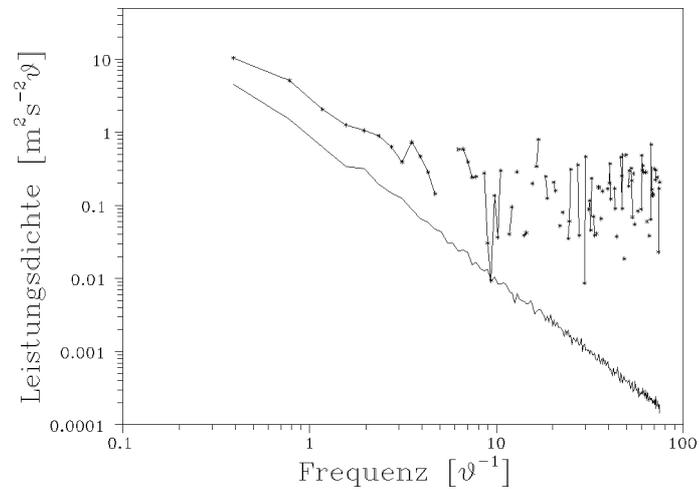


Abbildung C.55: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

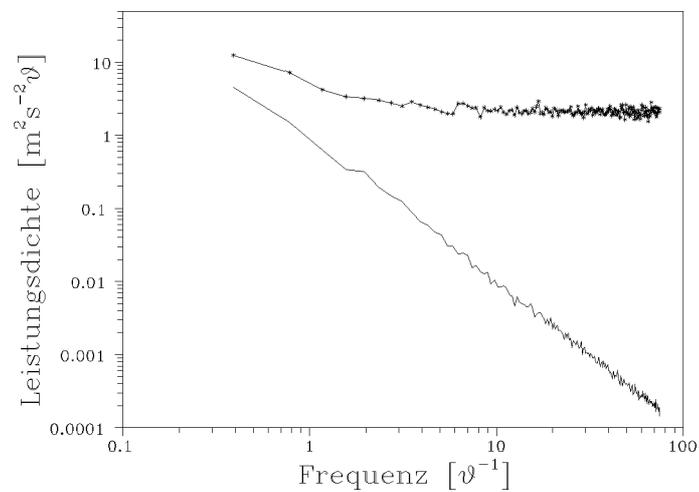


Abbildung C.56: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

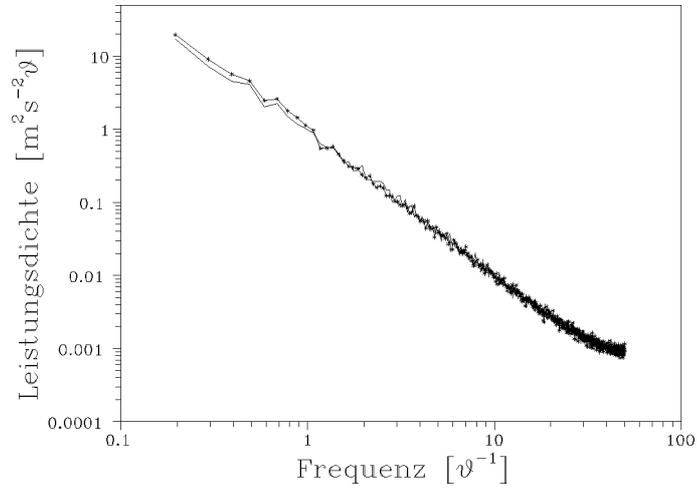


Abbildung C.57: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

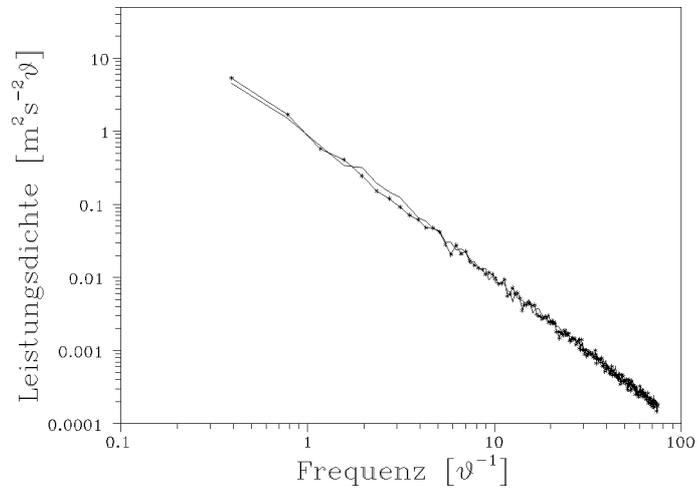


Abbildung C.58: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

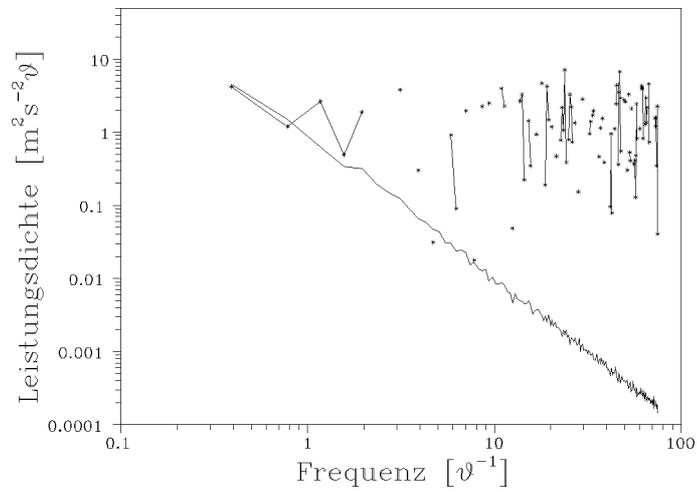


Abbildung C.59: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 1\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

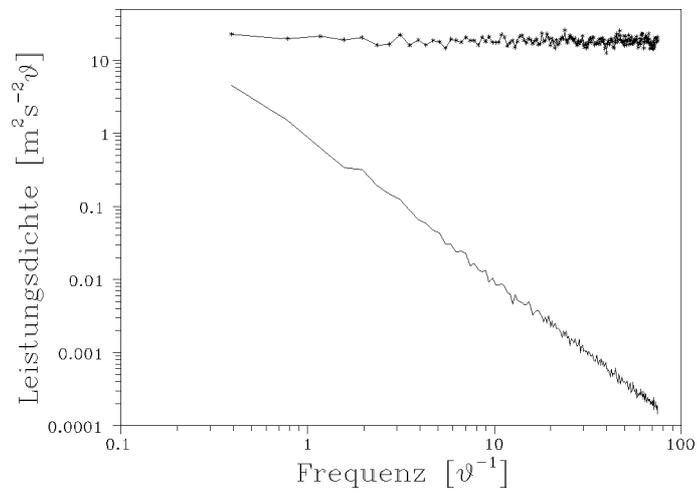


Abbildung C.60: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 1\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

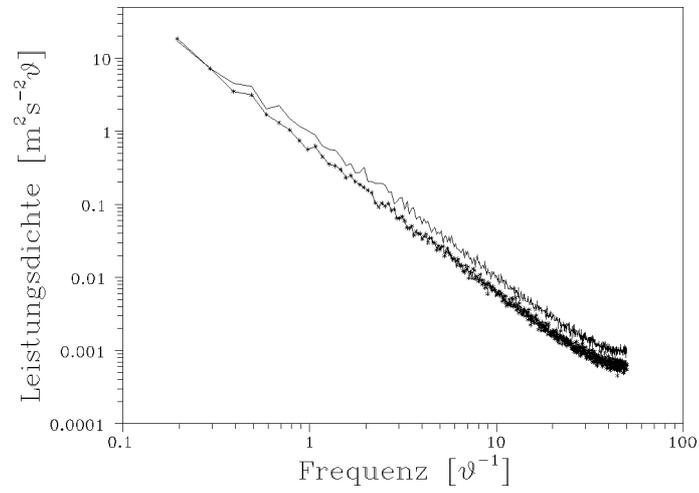


Abbildung C.61: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 1v^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

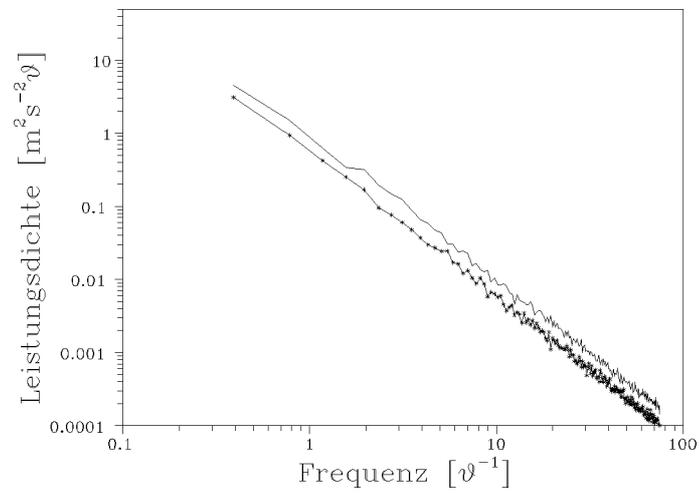


Abbildung C.62: Teilchenserie  $TU = 300\%$ ,  $N_D = 1v^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

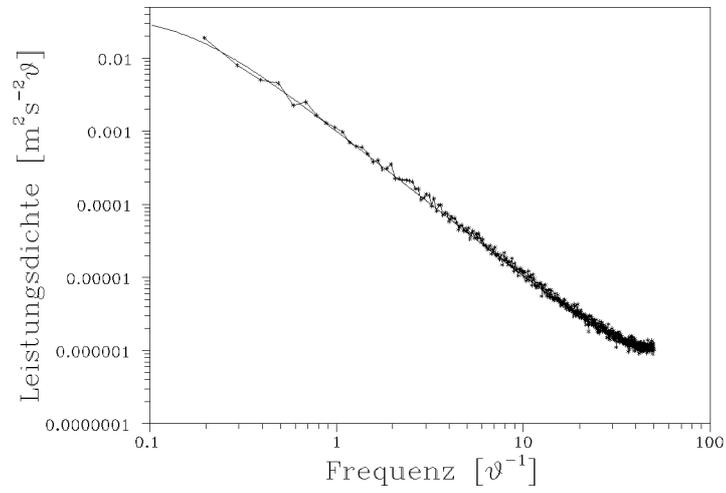


Abbildung C.63: Grundserie  $TU = 10\%$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

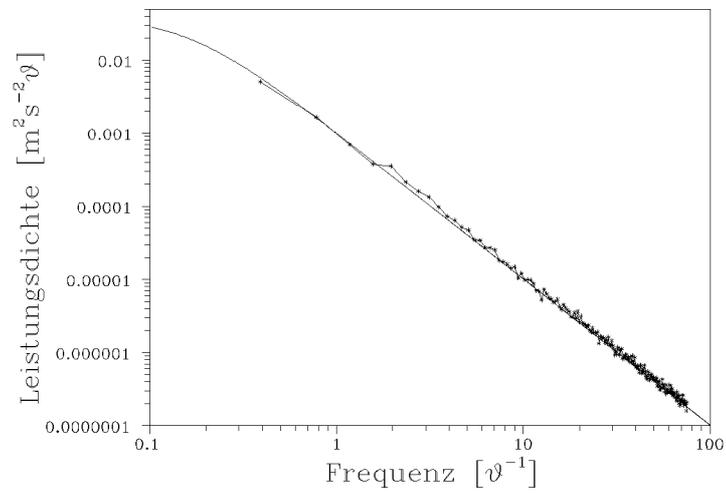


Abbildung C.64: Grundserie  $TU = 10\%$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

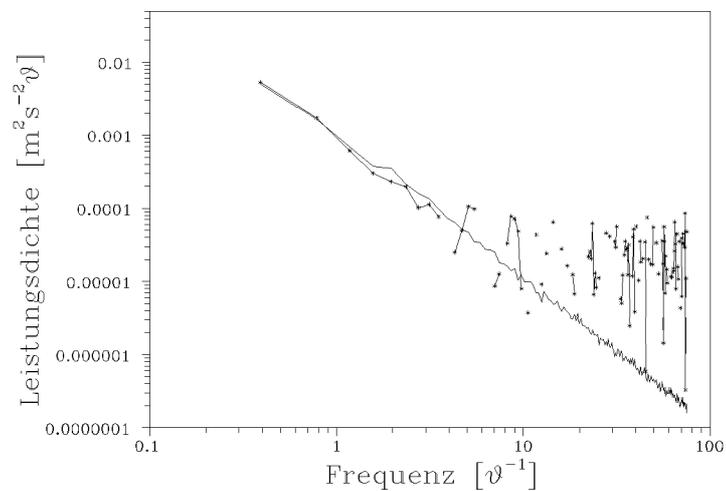


Abbildung C.65: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

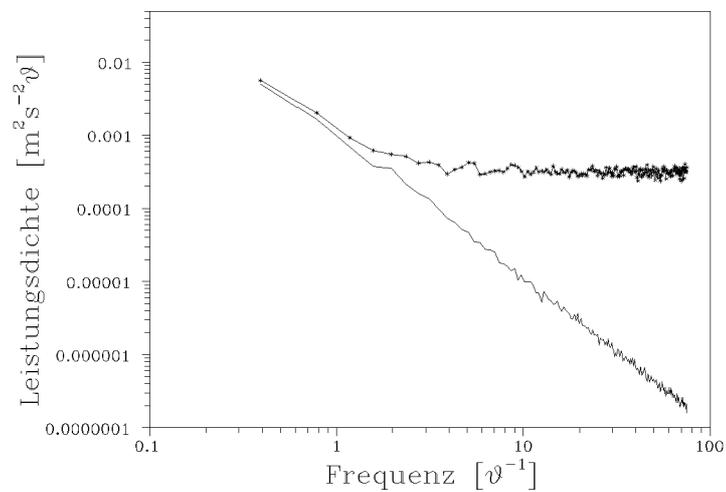


Abbildung C.66: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

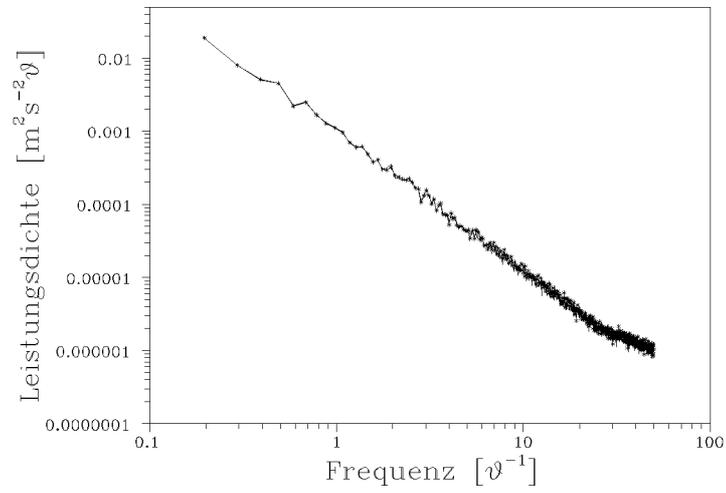


Abbildung C.67: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

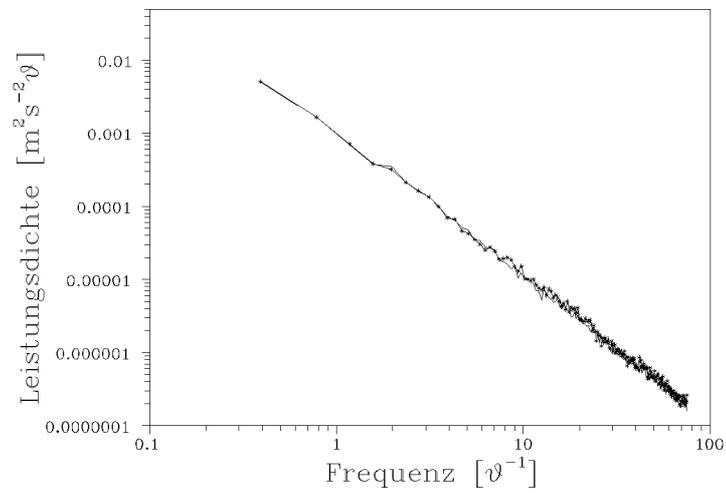


Abbildung C.68: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 50\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

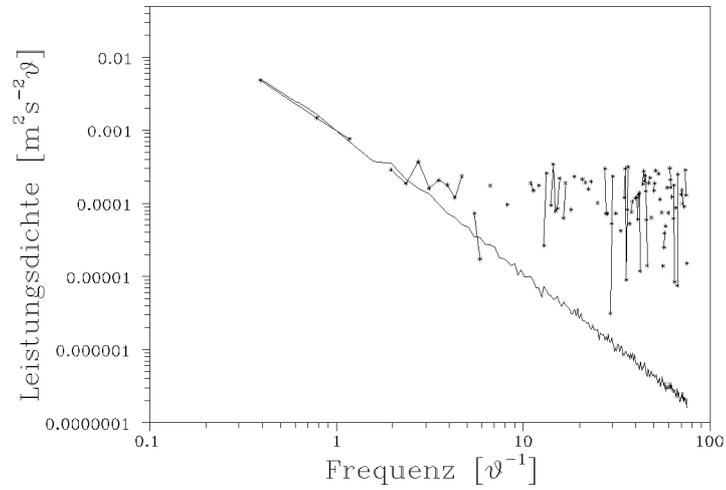


Abbildung C.69: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

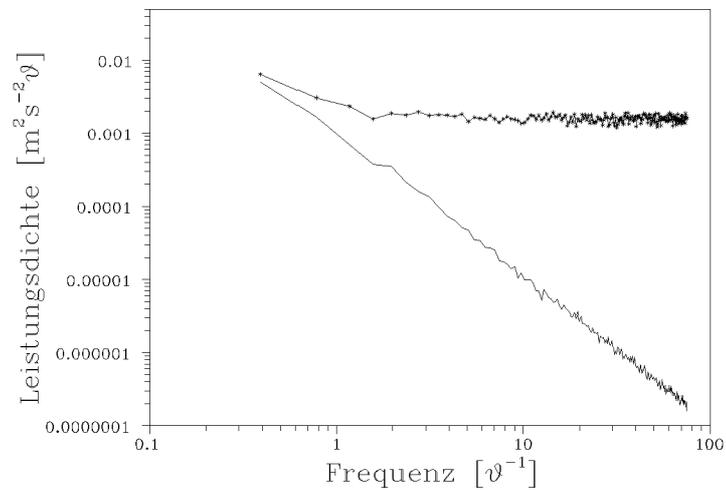


Abbildung C.70: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

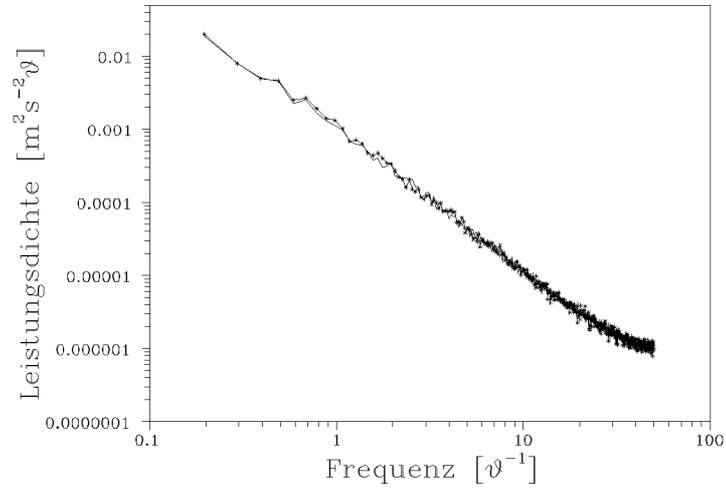


Abbildung C.71: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

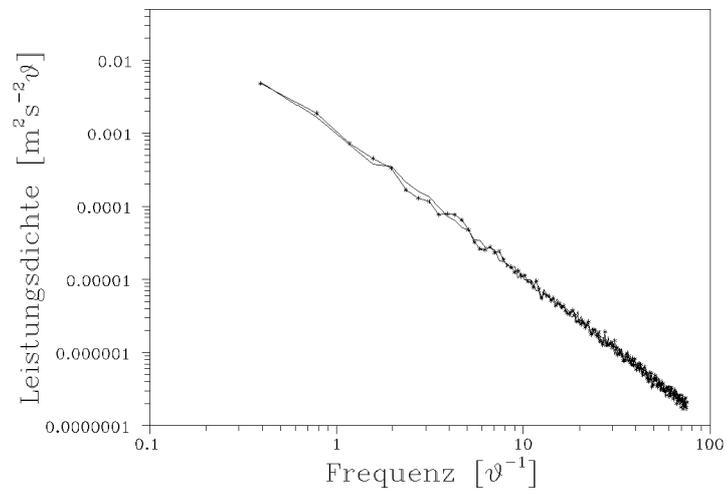


Abbildung C.72: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 10\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

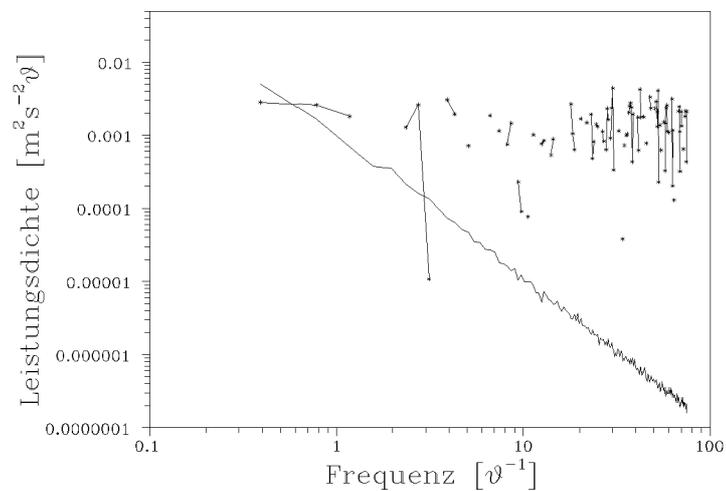


Abbildung C.73: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 1\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode mit Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

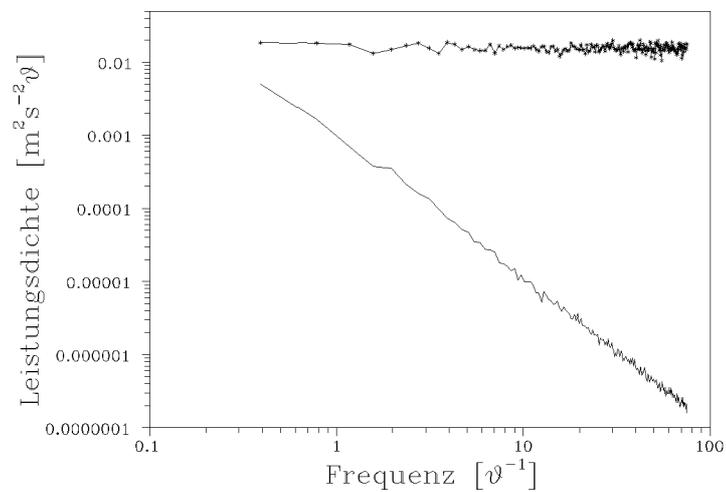


Abbildung C.74: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 1\vartheta^{-1}$ , Autokovarianz-/Autokorrelationsmethode ohne Biaskorrektur, Rechteckfenster, keine Wichtung

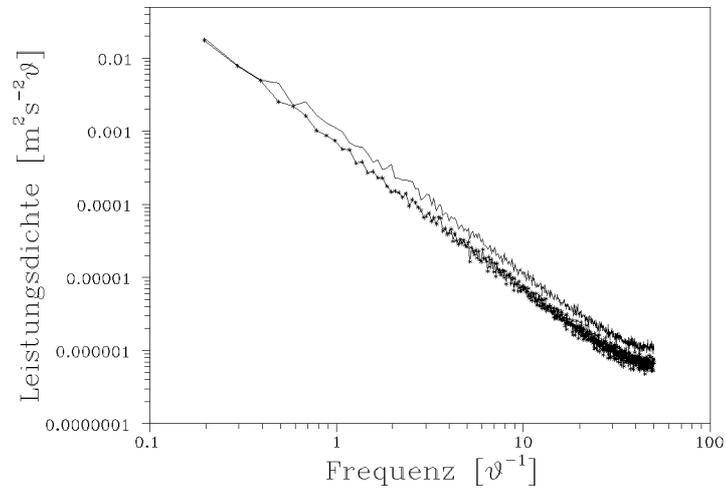


Abbildung C.75: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 1\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und Resampling, Rechteckfenster

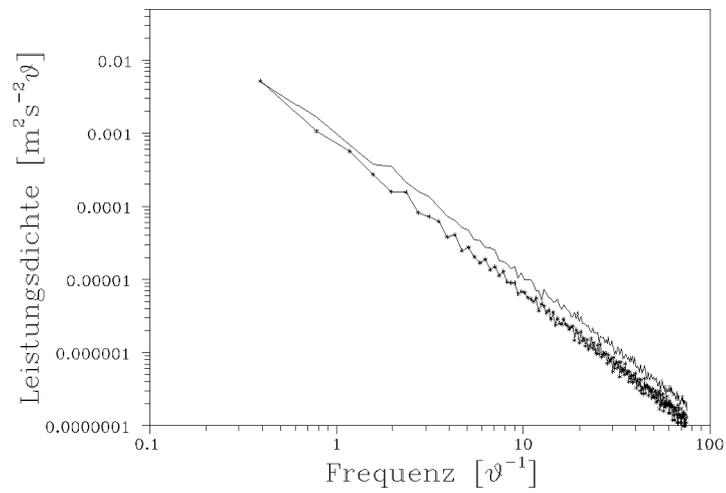


Abbildung C.76: Teilchenserie  $TU = 10\%$ ,  $N_D = 1\vartheta^{-1}$ ,  
Rekonstruktion und DFT (Fourierintegral), Rechteckfenster

## **Erklärung**

Ich versichere an Eides Statt, die Arbeit selbständig angefertigt und die benutzten Unterlagen vollständig angegeben zu haben.

Rostock-Warnemünde, den 17. August 1993