

# Simultane Bestimmung von Frequenz, Phase und Zeitverschiebung für PDA-Messungen

Holger Nobach

Dantec Measurement Technology, Tonsbakken 16–18, DK-2740 Skovlunde, Denmark

## Zusammenfassung

Für die Teilchengrößenbestimmung bei PDA-Messungen mit Streuteilchen, die größer sind als die Lasertaille, tritt zusätzlich zu der bekannten Phasenverschiebung der Burstsignale der Empfänger eine zeitliche Verschiebung der Amplitudenmaxima auf. Der vorliegende Beitrag stellt einen Algorithmus zur simultanen Bestimmung der Doppler-Frequenz, der Phasendifferenz sowie der Zeitdifferenz mit hoher Genauigkeit vor. Das Verfahren wird anhand von Simulationsrechnungen getestet und einem gängigen PDA-Verfahren gegenübergestellt. Die nötigen Ableitungen sind in einem Anhang zusammengefaßt, der unter <http://www-nt.e-technik.uni-rostock.de/~nobach/beitraege/gala99.html> abrufbar ist.

## 1 Einleitung

Die Teilchengrößenbestimmung bei PDA-Messungen basiert auf der Messung der Phasendifferenz zwischen den Burstsignalen zweier Empfänger. In [1] wurde die Genauigkeit dieses Verfahrens für unterschiedliche Teilchengrößen untersucht. Demnach sind die Fehler für Teilchendurchmesser kleiner als 0,3 der Lasertaille zu vernachlässigen. Für Teilchendurchmesser, die größer sind als die Lasertaille, verschiebt sich das Burstmaximum räumlich gegenüber der optischen Achse. Dadurch sind die empfangenen Signale zusätzlich zur Phasendifferenz zeitlich gegeneinander verschoben. Die Phasen- und die Zeitdifferenz hängen beide in komplexer Form von der Teilchengröße ab [1]. Durch die Berücksichtigung der Zeitdifferenz der Empfängersignale kann sowohl die Teilchengröße genauer bestimmt werden, als auch eine Validierung der gemessenen Phasendifferenz erfolgen. Insbesondere kann anhand der Zeitdifferenz die  $2\pi$ -Mehrdeutigkeit der Phaseninformation überwunden werden.

Unter der Voraussetzung von Prozeßstationarität (v. a. konstante Frequenz) können statistische Kennfunktionen wie das Kreuzleistungsdichtespektrum oder die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) zur Bestimmung der Signalparameter verwendet werden. Sie haben den Vorteil wesentlich geringeren Rauschens gegenüber dem Zeitsignal. Der Informationsgehalt der KKF und des komplexen Kreuzleistungsdichtespektrums ist identisch, sie lassen sich mit der Fourier-Transformation ineinander überführen. Daher ist grundsätzlich keine Funktion der anderen bei der Informationsgewinnung vorzuziehen.

Während das Referenzverfahren [2] auf der Kreuzleistungsdichte basiert, wertet der neue Algorithmus die KKF aus. Zur Bestimmung der Signalparameter wird dabei eine modellbasierte Analyse verwendet, wie sie z. B. in [3] beschrieben ist. Dazu muß der Signalcharakter in Form eines geeigneten Modells vorab bekannt sein. Die Bestimmung der Modellparameter erfolgt derart, daß das Modell mit dem gemessenen Signal oder dessen statistischen Kennfunktionen möglichst gut übereinstimmt.

Ein geeignetes Modell zur Beschreibung eines PDA-Signals (ohne Gleichanteil) ist die Gauß-modulierte Kosinusfunktion

$$u_A(t) = A_{At}G\left(\frac{t-t_{A0}}{b_t}\right)\cos(2\pi t f_D + \phi_A) \quad (1)$$

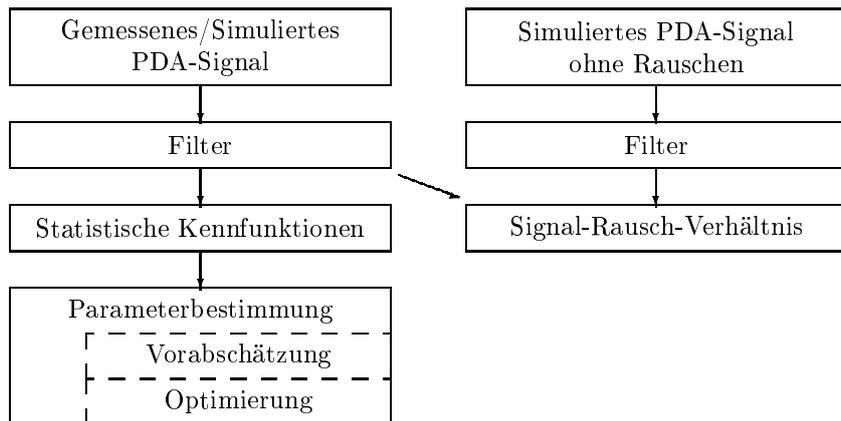


Abbildung 1: Schritte der Signalverarbeitung

$$u_B(t) = A_{Bt}G\left(\frac{t-t_{B0}}{b_t}\right)\cos(2\pi t f_D + \phi_B) \quad (2)$$

mit der Gauß-ähnlichen Funktion  $G(x) = e^{-x^2/2}$ , den Signalamplituden  $A_{At}$  und  $A_{Bt}$  der beiden Empfänger  $A$  und  $B$ , der Doppler-Frequenz  $f_D$ , den Phasen  $\phi_A$  und  $\phi_B$ , den „Ankunftszeiten“ (Zeiten maximaler Amplitude der Einhüllenden)  $t_{A0}$  und  $t_{B0}$  und der Breite  $b_t$  der Gauß-Einhüllenden. Die Doppler-Frequenz und die Gauß-Breite wird für beide Empfänger als gleich vorausgesetzt. Die Phasendifferenz ist durch  $\Delta\phi = \phi_B - \phi_A$  und die Zeitdifferenz durch  $\Delta t = t_{B0} - t_{A0}$  gegeben. Die KKF eines solchen Signalpaares ist dann

$$R(\tau) = A_R G\left(\frac{\tau - \Delta t}{b_R}\right)\cos(2\pi\tau f_D + \Delta\phi) \quad (3)$$

mit  $b_R = \sqrt{2}b_t$ .

Im folgenden Abschnitt werden die Schritte der Signalverarbeitung einzeln beschrieben. Zur Einschätzung der Leistungsfähigkeit des neuen Verfahrens werden numerische Simulationsrechnungen durchgeführt, die in Abschnitt 3 zusammen mit den Ergebnissen der Untersuchung dargestellt sind. Der letzte Abschnitt faßt die Ergebnisse kommentierend zusammen.

## 2 Signalverarbeitung

Die Verarbeitung von PDA-Signalen besteht aus einer Folge von Einzelschritten (Abb. 1). Jeder Schritt wird nachfolgend beschrieben. Die Bestimmung des Signal-Rausch-Verhältnisses (SNR) wird nur für die Einordnung der Simulationsergebnisse verwendet und ist nicht Bestandteil der normalen Burstanalyse. Die Berechnung erfolgt anhand des rauschfreien Signals und ist somit nur für Simulationsrechnungen anwendbar.

### 2.1 Filter

Zur Abtrennung des Gleichanteils der Doppler-Bursts (Abb. 2a) wird ein digitales Filter auf Grundlage der diskreten Fourier-Transformation (DFT)

$$U_j = \sum_{i=0}^{N-1} u_i e^{-2\pi i i j / N} \quad j = 0 \dots N-1 \quad (4)$$

mit der imaginären Einheit  $i$  verwendet. Alle spektralen Anteile der komplexen, diskreten Fourier-Transformierten  $U_j$  der zeitdiskreten Burst-Funktion  $u_i$  (mit der Abtastfrequenz  $f_s$ ), die unterhalb einer vorgegebenen Grenzfrequenz  $f_c$  (hier 0.4 MHz) liegen, werden null gesetzt. Wegen der

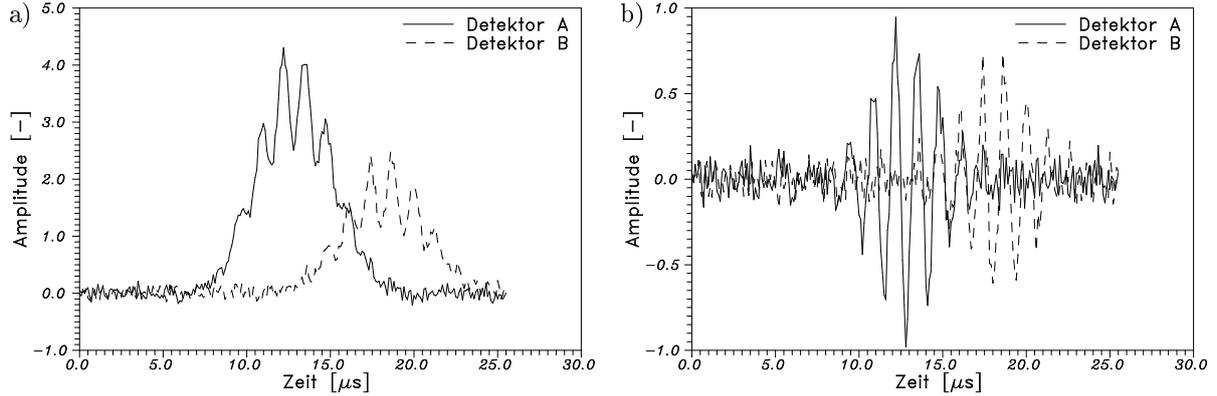


Abbildung 2: Simuliertes PDA-Signalpaar: a) mit Gleichanteil; b) gefiltert

Symmetrie der Fourier-Transformierten müssen auch die Anteile oberhalb von  $f_s - f_c$  null gesetzt werden. Die inverse DFT (IDFT)

$$u_i = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{2\pi i i j / N} \quad i = 0 \dots N - 1 \quad (5)$$

ergibt die vom Gleichanteil befreiten Doppler-Bursts (Abb. 2b).

## 2.2 Signal-Rausch-Verhältnis

Das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) wird anhand der Definition

$$\text{SNR/dB} = 10 \lg \left( \frac{\sigma_S^2}{\sigma_N^2} \right) \quad (6)$$

mit der Signalleistung  $\sigma_S^2$  und der Rauschleistung  $\sigma_N^2$  berechnet. Hierzu wird eine Trennung des verrauschten Signals in das rauschfreie Signal und das reine Rauschsignal benötigt. Für reale Messungen ist diese Definition somit nicht anwendbar. Im Falle von Simulationsrechnungen liegen beide Anteile getrennt vor. Die Signal- bzw. Rauschleistungen werden für beide Empfängersignale getrennt durch die empirische Varianz berechnet und anschließend zu einer gemeinsamen Signal- bzw. Rauschleistung geometrisch gemittelt.

## 2.3 Statistische Kennfunktionen

Unter der Voraussetzung zeitinvarianter Doppler-Frequenz können statt der Zeitfunktion statistische Kennfunktionen wie das Kreuzleistungsdichtespektrum oder die KKF zur Parameterbestimmung herangezogen werden. Sie bieten gegenüber dem Zeitsignal den Vorteil wesentlich geringeren Rauschens, wodurch die statistische Sicherheit bei der Parameterschätzung zunimmt. Sowohl die Zeit- als auch die Phasendifferenz der Empfängersignale bleiben durch diese Transformationen erhalten.

Die komplexe Kreuzleistungsdichte wird durch

$$S_j = \frac{1}{f_s N} \left[ \left( \sum_{i=0}^{N-1} u_{Ai} e^{-2\pi i i j / N} \right) \left( \sum_{i=0}^{N-1} u_{Bi} e^{+2\pi i i j / N} \right) \right] \quad j = 0 \dots N - 1 \quad (7)$$

aus den beiden Empfängersignalen  $u_{Ai}$  und  $u_{Bi}$  berechnet. Sie ist in Abb. 3a zusammen mit dem Betrag  $|S_j|$  dargestellt.

Die KKF wird aus dem komplexen Kreuzleistungsdichtespektrum mit

$$R_i = \frac{f_s}{N} \sum_{j=0}^{N-1} S_j e^{2\pi i i j / N} \quad i = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2} - 1 \quad (8)$$

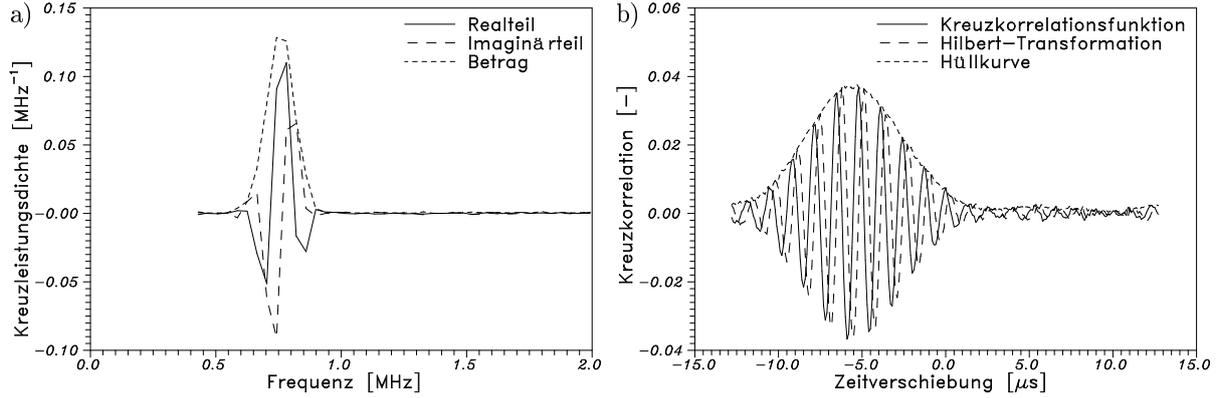


Abbildung 3: a) Komplexes Kreuzleistungsdichtespektrum und Betrag; b) Kreuzkorrelationsfunktion, Hilbert-Transformation und Hüllfunktion

berechnet (Abb. 3b).

Für die KKF wird mit Hilfe der Hilbert-Transformation eine Hüllkurve berechnet. Die Hilbert-Transformation generiert zu einem gegebenen ein um 90° phasenverschobenes Signal. Abb. 3 zeigt die KKF  $R_i$  und die entsprechende Hilbert-Transformierte  $R_{Hi}$ . Die Hüllfunktion  $H_i$  der KKF kann durch

$$H_i = \sqrt{R_i^2 + R_{Hi}^2} \quad (9)$$

berechnet werden.

## 2.4 Parameterbestimmung

### 2.4.1 Vorabschätzung

Die Aufgabe der Vorabschätzung ist die Bereitstellung eines Parametersatzes für die Initialisierung des Optimierungsalgorithmus. Setzt man den Gauß-Charakter der KKF-Hüllkurve voraus, so ist das Integral von  $-\infty$  bis  $\infty$

$$I = Ab_R \sqrt{2\pi} \quad (10)$$

mit der Amplitude  $A$  und der Gauß-Breite  $b_R$ . Durch Umstellen ergibt sich für die Gauß-Breite

$$b_R = \frac{I}{A\sqrt{2\pi}}. \quad (11)$$

Das Integral wird durch

$$I = \frac{1}{f_s} \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} H_i. \quad (12)$$

berechnet und als Näherung für die Amplitude  $A$  wird der Maximalwert der Hüllkurve  $H_i$  verwendet.

Zur Bestimmung der Doppler-Frequenz wird eine Gauß-förmige Fensterfunktion  $G((f - f_m)/b_S)$  mit der Breite  $b_S = \frac{1}{2\pi b_R}$  und der Mittenfrequenz  $f_m$  definiert. Die Festlegung der Mittenfrequenz führt zu unterschiedlichen Leistungen

$$P(f_m) = \sum_{j=[Nf_c/f_s]+1}^{N/2} |S_j| G\left(\frac{f_j - f_m}{b_S}\right) \quad f_j = jf_s/N \quad (13)$$

des gefensterten Betrages der Leistungsdichte  $|S_j|$ . Die Leistungen werden für alle diskreten Frequenzen des Leistungsdichtespektrums berechnet. Die Mittenfrequenz  $f_m$ , die zur stärksten gefensterten Leistung  $P(f_m)$  führt, wird als Vorabschätzung der Doppler-Frequenz  $f_D$  verwendet.

Da die Vorabschätzung der Doppler-Frequenz diskret mit den Spektrallinien der Leistungsdichte erfolgt, kann die Phasendifferenz der Empfängersignale direkt aus dem komplexen Kreuzleistungsdichtespektrum bestimmt werden.

$$\Delta\phi = \arg\{S(f_D)\} \quad (14)$$

Um die Zeitdifferenz der Empfängersignale abzuschätzen, wird wiederum ein Gauß-förmiges Fenster  $G((\tau - \Delta t_m)/b_R)$  mit der Breite  $b_R$  und der Mittenzeitverschiebung  $\Delta t_m$  definiert. Es wird diejenige Verschiebung  $\Delta t_m$  als Vorabschätzung der Zeitdifferenz  $\Delta t$  der Empfängersignale verwendet, die zur maximalen Leistung

$$P(\Delta t_m) = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} H_i G\left(\frac{\tau_i - \Delta t_m}{b_R}\right) \quad \tau_i = i/f_s \quad (15)$$

führt.

## 2.4.2 Optimierung

Im letzten Schritt der Signalverarbeitung werden die Parameter der Modell-KKF derart optimiert, daß das Modell der KKF des gemessenen PDA-Signals möglichst nahe kommt. Um große Änderungen der Phase  $\Delta\phi$  durch kleine Korrekturen der Doppler-Frequenz  $f_D$  bei großen Zeitdifferenzen  $\Delta t$  zu vermeiden, werden die relativen Größen  $\tau'_i = \tau_i - \Delta t_{\text{pre}}$  und  $\Delta\phi' = \Delta\phi + 2\pi\Delta t_{\text{pre}}f_D$  definiert, die sich auf die Vorabschätzung der Zeitdifferenz  $\Delta t_{\text{pre}}$  beziehen. Die Phasendifferenz wird bezüglich dieses festen Zeitpunktes optimiert. Als Index der Übereinstimmung wird die Korrelation der empirischen KKF mit einer normierten Modell-KKF in Form der Leistung

$$P(f_D; \Delta t; \Delta\phi') = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} R_i G\left(\frac{\tau_i - \Delta t}{b_R}\right) \cos(2\pi f_D \tau'_i + \Delta\phi') \quad (16)$$

ähnlich wie bei der Vorabschätzung verwendet. Das Parameteroptimum wird iterativ durch einen Tangentialalgorithmus bestimmt. Der Iterationsschritt von  $n$  auf  $n+1$  ist durch die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 e}{\partial f_D^2} & \frac{\partial^2 e}{\partial f_D \partial \Delta t} & \frac{\partial^2 e}{\partial f_D \partial \Delta\phi'} \\ \frac{\partial^2 e}{\partial f_D \partial \Delta t} & \frac{\partial^2 e}{\partial \Delta t^2} & \frac{\partial^2 e}{\partial \Delta t \partial \Delta\phi'} \\ \frac{\partial^2 e}{\partial f_D \partial \Delta\phi'} & \frac{\partial^2 e}{\partial \Delta t \partial \Delta\phi'} & \frac{\partial^2 e}{\partial \Delta\phi'^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_D^{(n)} - f_D^{(n+1)} \\ \Delta t^{(n)} - \Delta t^{(n+1)} \\ \Delta\phi'^{(n)} - \Delta\phi'^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial e}{\partial f_D} \\ \frac{\partial e}{\partial \Delta t} \\ \frac{\partial e}{\partial \Delta\phi'} \end{pmatrix} \quad (17)$$

bestimmt. Die partiellen Ableitungen sind im Anhang zusammengefaßt, der unter <http://www-nt.e-technik.uni-rostock.de/~nobach/beitraege/gala99.html> abrufbar ist. Die Iteration beginnt mit den Vorabschätzungen der Parameter. Um eine Divergenz des Algorithmus zu vermeiden, werden nach jedem Iterationsschritt die Parametergrenzen  $f_c \leq f_D \leq f_{N/2}$  und  $|\Delta t| \leq \tau_{N/2}$  und die Konvexität der Leistung durch  $\partial^2 P / \partial f_D^2 > 0$ ,  $\partial^2 P / \partial \Delta t^2 > 0$  und  $\partial^2 P / \partial \Delta\phi'^2 > 0$  geprüft.

		Empfänger A		Empfänger B	
Parameter	Einheit	Mittelwert $m$	Variationsbereich $\Delta$	Mittelwert $m$	Variationsbereich $\Delta$
$A_t$	-	0.8	0.2	0.6	0.2
$f_D$	MHz	1.0	0.3	-	-
$\phi$	-	1.1	3.0	-1.3	3.0
$t_0$	$\mu s$	11.5	2.5	16.5	2.5
$\ln \sigma_N^2$	-	-2	4	-	-
$b_t$	$\mu s$	2.0	0.5	-	-
$\delta_G$	$\mu s$	1.3	0.25	1.3	0.25

Tabelle 1: Mittelwerte und Variationsbereich der Simulationsparameter

### 3 Verifikation

Die Rechnersimulation generiert ein äquidistant mit der Frequenz  $f_s = 10$  MHz abgetastetes Signalpaar mit  $N = 256$  Werten. Für jeden der beiden Empfänger A und B wird ein Doppler-Burst erzeugt

$$u_i = A_t \left[ G \left( \frac{t_i - t_0}{b_t} \right) \cos(2\pi t_i f_D + \phi) + \frac{G \left( \frac{t_i - t_0 - \delta_G}{b_t} \right) + G \left( \frac{t_i - t_0 + \delta_G}{b_t} \right)}{G \left( \frac{2\delta_G}{b_t} \right)} \right] + \tilde{u}_i \quad (18)$$

$$\tilde{u}_i = \tilde{g} \sqrt{\sigma_N^2} \quad i = 0 \dots N - 1 \quad (19)$$

mit den Abtastzeitpunkten  $t_i = i/f_s$ , den Signalamplituden  $A_t$ , der Doppler-Frequenz  $f_D$ , der Burstbreite  $b_t$ , der Phase  $\phi$ , der Ankunftszeit  $t_0$ , der Rauschkomponente  $\tilde{u}_i$  mit der Rauschleistung  $\sigma_N^2$ , die durch die normalverteilte Zufallsgröße  $\tilde{g}$  mit der Varianz 1 definiert ist. Die Größe  $\delta_G$  entspricht keiner physikalischen Meßgröße, sie beeinflusst den Modulationsindex des simulierten Burstes. Die Doppler-Frequenz  $f_D$ , die Gauß-Breite  $b_t$  und die Rauschleistung  $\sigma_N^2$  sind für eine Signalrealisierung für beide Empfänger identisch. Alle anderen Parameter sind unabhängig für die beiden Empfänger. Abb. 2a zeigt ein derart generiertes Signalpaar.

Für jede Realisierung der simulierten PDA-Signale werden die Parameter neu festgelegt. Sie werden zufällig (gleichverteilt) aus einem Intervall  $[m - \Delta; m + \Delta]$  ausgewählt. Für die Festlegung der Rauschleistung wird der Logarithmus  $\ln \sigma_N^2$  entsprechend gleichverteilt aus diesem Intervall gewählt. In Tabelle 1 sind die mittleren Werte  $m$  und der Variationsbereich  $\Delta$  der Simulationsparameter zusammengefaßt.

Um statistisch ausreichend gesicherte Ergebnisse zu bekommen, wurden die Simulation und die Signalauswertung 100 000 mal mit unterschiedlichem SNR der simulierten Bursts (Eingangs-SNR) realisiert. Dabei wurden die Doppler-Frequenz, die Phasen- und die Zeitverschiebung mit dem vorgestellten Algorithmus berechnet. Zum Vergleich wurde die 3-Punkt-Gauß-Interpolation [2] als Referenz realisiert. Der Variationsbereich des Eingangs-SNR wurde in Klassen unterteilt. Die statistische Auswertung der Schätzergebnisse erfolgte für jede Klasse getrennt und umfaßt den jeweiligen Mittelwert und die Varianz der unterschiedlichen Schätzgrößen. Durch die Variation der Simulationsparameter können nicht die von den Algorithmen berechneten Größen direkt, sondern nur die Abweichungen zu den Simulationsvorgaben ausgewertet werden. Außerdem werden die relative Anzahl erfolgreicher Parameteroptimierungen ohne Verletzung der Konvexitäts- und Bereichsvorgaben und die mittlere Anzahl der nötigen Iterationen bestimmt, um eine Genauigkeit von  $10^{-6}$  für alle Modellparameter zu erreichen.

Abb. 4 zeigt die mittlere Abweichung der Frequenzschätzung und die Varianz der Schätzung, Abb. 5 und Abb. 6 entsprechend die Ergebnisse der Phasen- und Zeitdifferenzschätzung. Generell ist die Schätzung für eine hohe Signalqualität erwartungstreu und die Schätzvarianz wird

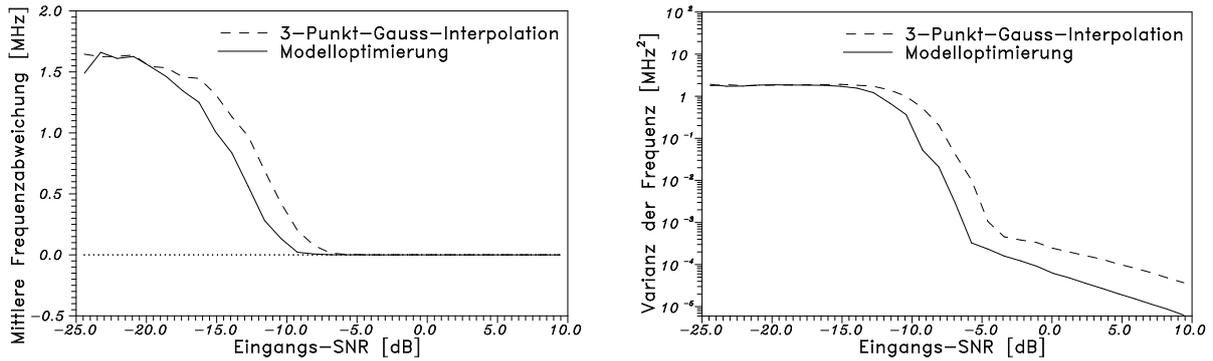


Abbildung 4: Mittlere Abweichung und Varianz der Frequenzschätzung

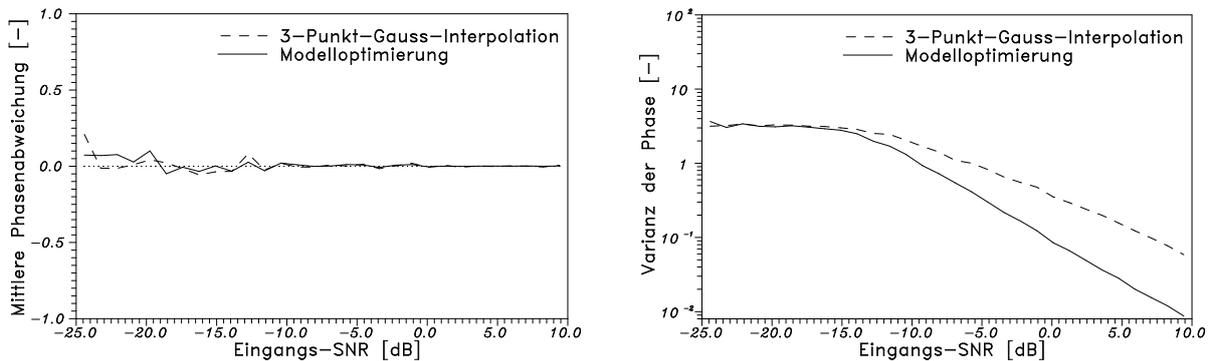


Abbildung 5: Mittlere Abweichung und Varianz der Phasendifferenzschätzung

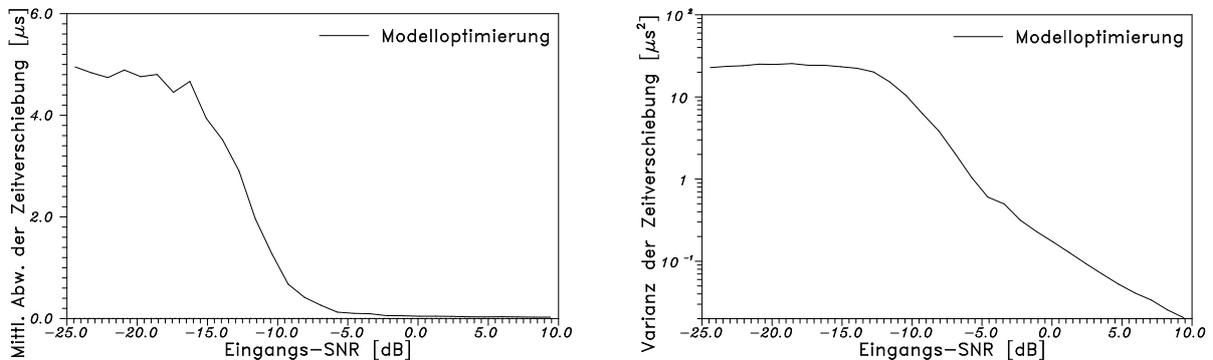


Abbildung 6: Mittlere Abweichung und Varianz der Zeitdifferenzschätzung

mit zunehmender Signalqualität geringer. Unterhalb eines bestimmten Eingangs-SNR wird die Schätzung instabil und die Parameterbestimmung erfolgt zufällig aus dem Gültigkeitsbereich.

Der neue Algorithmus hat sowohl eine kleinere Schätzvarianz im stabilen SNR-Bereich als auch eine Erweiterung des stabilen Bereichs in Richtung kleinerer SNRs im Vergleich zum Referenzalgorithmus. Als zusätzliche Größe kann mit dem neuen Verfahren die Zeitdifferenz der Empfängersignale bestimmt werden.

In Abb. 7a ist die relative Anzahl erfolgreicher Parameterschätzungen dargestellt. Für geringe Signalqualitäten ist die Erfolgsquote des neuen Algorithmus aufgrund der Konvexitäts- und Bereichsprüfungen wesentlich vermindert. Da in diesem Bereich die Parameterbestimmung sehr unzuverlässig ist, können diese Tests als zusätzliches Kriterium herangezogen werden, um Fehlmessungen zu vermeiden. Das Referenzverfahren ist hierbei sehr tolerant. Es filtert nur solche Messungen heraus, die an den Grenzen des Frequenzbereiches maximale Amplituden haben. Da

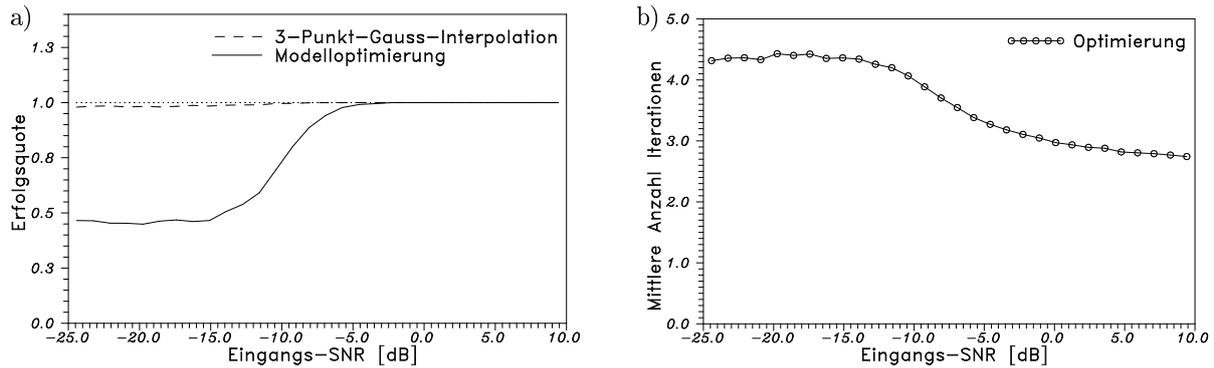


Abbildung 7: a) Relative Anzahl erfolgreicher Parameterschätzungen; b) mittlere Anzahl der Iterationen

diese entweder keinen Vorgänger oder keinen Nachfolger haben, kann die 3-Punkt-Interpolation nicht erfolgen.

Für die Parameterbestimmung mit dem neuen Verfahren werden durchschnittlich nur knapp 3 Iterationsschritte bei hohem Eingangs-SNR benötigt. Die Anzahl steigt mit abnehmender Signalqualität auf etwas über 4 Iterationen an. (Abb. 7b).

## 4 Zusammenfassung

Die modellbasierte Schätzung der Doppler-Frequenz, der Phasen- und der Zeitdifferenz aus PDA-Signalen mit der Gauß-modulierten Kosinusfunktion als Signalmodell bezieht wesentlich mehr Informationen in die Signalverarbeitung ein als klassische Verfahren. Das führt zu einer größeren statistischen Sicherheit der Schätzung und zu einer Ausweitung des Einsatzbereiches in Richtung geringerer Signalqualität. Darüber hinaus wird durch den neuen Algorithmus neben der Phasen- auch die Zeitdifferenz der Empfängersignale bestimmt. Dadurch wird die PDA-Meßtechnik auch für Teilchen, deren Durchmesser größer als die Lasertaille ist, anwendbar.

Außer dem hier vorgestellten Algorithmus mit Fensterfunktionen wurden weitere untersucht, die zur Parameteroptimierung die  $L_2$ -Norm (Least Mean Square) verwenden. Vorteil dieser Algorithmen ist die Möglichkeit, zusätzlich die Amplituden und die Breite der Einhüllenden und somit die Aufenthaltszeit des Teilchens im Meßvolumen als Modellparameter abschätzen zu können. Dem steht ein wesentlich höherer Rechenaufwand entgegen, und die Genauigkeit der Frequenz-, Phasen- und Zeitdifferenzbestimmung ist nur unwesentlich höher.

## Literatur

- [1] H E Albrecht, M Borys, and N Damaschke. Analyse des Phasen-Doppler-Signals bei inhomogener Verteilung der Intensität des Laserstrahles im Bereich des Streuteilchens. In *Proc. 6. Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik*, Essen, 1998. Beitrag 11.
- [2] J Domnick, H Ertl, and C Tropea. Processing of phase/Doppler signals using the cross spectral density function. In *Proc. 4th Int. Symp. on Appl. of Laser Techn. to Fluid Mechanics*, Lisbon, Portugal, 1988. paper 3.8.
- [3] E Müller, H Nobach, and C Tropea. Model parameter estimation from non-equidistant sampled data sets at low data rates. *Meas. Sci. Technol.*, 9(3):435–441, 1998.

## Korrektur

S. 5, Gleichung (17):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial f_D^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial f_D \partial \Delta t} & \frac{\partial^2 P}{\partial f_D \partial \Delta \phi'} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial f_D \partial \Delta t} & \frac{\partial^2 P}{\partial \Delta t^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial \Delta t \partial \Delta \phi'} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial f_D \partial \Delta \phi'} & \frac{\partial^2 P}{\partial \Delta t \partial \Delta \phi'} & \frac{\partial^2 P}{\partial \Delta \phi'^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_D^{(n)} - f_D^{(n+1)} \\ \Delta t^{(n)} - \Delta t^{(n+1)} \\ \Delta \phi'^{(n)} - \Delta \phi'^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial f_D} \\ \frac{\partial P}{\partial \Delta t} \\ \frac{\partial P}{\partial \Delta \phi'} \end{pmatrix}$$