

# Modellbasierte Bestimmung von Turbulenzspektren aus kurzen LDA-Datensätzen bei geringer Datenrate

H. Nobach, E. Müller

Universität Rostock, Fachbereich Elektrotechnik  
Institut für Nachrichtentechnik und Informationselektronik  
R.-Wagner-Str. 31, 18119 Rostock

C. Tropea

Universität Erlangen, Lehrstuhl für Strömungsmechanik  
Cauerstr. 4, 91058 Erlangen

## Einführung

Bei der Geschwindigkeitsmessung in turbulenten Strömungen mittels der Laser-Doppler-Anemometrie stellt der aufgenommene Datensatz, durch das Meßverfahren bedingt, eine zeitlich nicht äquidistant abgetastete Zeitreihe dar. Dabei ist die Meßrate mit dem Meßwert selbst korreliert. Die Verarbeitung derartiger Daten zur Bestimmung statistischer Kennfunktionen des zeitlichen Geschwindigkeitsverlaufs, z. B. des Turbulenzspektrums, erfolgt standardmäßig durch nichtparametrische Verfahren. Hierbei können die LDA-Daten sowohl direkt unter Berücksichtigung der statistischen Eigenschaften der Abtastfunktion verarbeitet werden [4, 6] als auch als Grundlage für eine Signalrekonstruktion [1, 7] mit nachfolgender Anwendung klassischer Analyseverfahren, z. B. Resampling und FFT, dienen. Unter der Bedingung langzeitiger Prozeßstationarität kann die bekanntlich hohe Varianz bei Anwendung dieser Verfahren zur Bestimmung des Turbulenzspektrums durch eine Mittelung über die Ergebnisse mehrerer kleiner Blöcke [4] verringert werden. Bei nur kurzzeitig stationären oder unterabgetasteten Prozessen liefern diese Verfahren keine brauchbaren Ergebnisse.

Eine leistungsfähige Alternative hierzu sind modellbasierte (parametrische) Verfahren, die die Meßdaten nur zur Bestimmung der modellgebundenen Parameter verwenden. Das Turbulenzspektrum kann dann aus den geschätzten Modellparametern berechnet werden. Zur Varianzreduktion ist auch bei parametrischer Bestimmung des Turbulenzspektrums eine Blockmittelung möglich.

## Modellbasierte Bestimmung des Turbulenzspektrums

Gegenstand des Beitrages ist ein neues Verfahren zur Bestimmung des Turbulenzspektrums aus LDA-Meßdaten. Es handelt sich um ein modellbasiertes Verfahren, das speziell für kurze Datensätze mit sehr geringer Datenrate ausgelegt ist. Die untersuchte Strömung wird hierbei durch ein ARMA-Modell (autoregressive moving average) [5] unterschiedlicher Ordnung angenähert.

Der Mittelwert und die Varianz der Strömung werden durch unabhängige Algorithmen bestimmt [2]. Aus einem bestimmten Parametersatz des ARMA-Modells wird eine statistische Kennfunktion (Autokorrelationsfunktion  $R(\tau)$ , Leistungsdichtespektrum  $S(f)$ , Zeitverlauf  $u(t)$ ) berechnet. Aus dieser Funktion und einer vergleichbaren Funktion des realen Meßdatensatzes wird eine Fehlergröße gebildet. Ein Suchalgorithmus bestimmt dann diejenigen Parameter des ARMA-Modells, für die diese Fehlergröße minimal wird. Aus dem so gefundenen Parametersatz wird dann das Turbulenzspektrum berechnet [5].

Bei der hier vorgestellten Realisierung des Verfahrens wird als Vergleichsfunktion eine modifizierte Korrelationsfunktion verwendet. Aus den Modellparametern kann direkt die Autokorrelationsfunktion des ARMA-Modells  $R_{ARMA}(\tau)$  bestimmt werden [5]. Aus den LDA-Meßdaten werden dann die beiden Hilfsfunktionen

$$\left. \begin{aligned} g_k &= \sum_{i,j=1}^N u_i u_j w_i w_j \\ h_k &= \sum_{i,j=1}^N w_i w_j \end{aligned} \right\} \begin{cases} i \neq j \\ k\Delta\tau \leq t_j - t_i < (k+1)\Delta\tau \end{cases}$$

( $N$  Anzahl der LDA-Meßwerte  $u_i = u(t_i)$ ,  $w_i$  Wichtungsfaktoren entsprechend [2]) gebildet. Dies entspricht der Berechnung der Slotkorrelation [8], wobei hier keine Division der akkumulierten Geschwindigkeitsprodukte  $g_k$  durch die Anzahl der Produkte  $h_k$  im  $k$ -ten Slot erfolgt und keine Selbstprodukte berücksichtigt werden. Durch

$$\epsilon^2 = \sum_{k=0}^{N_k-1} (R_{ARMA}(k\Delta\tau)h_k - g_k)^2$$

( $N_k$  Anzahl der Slots) ist eine Fehlergröße definiert, die von  $R_{ARMA}(\tau)$  und somit vom aktuellen Parametersatz abhängt. Ein Suchalgorithmus bestimmt nun denjenigen Parametersatz, für den diese Fehlergröße minimal wird.

### Verifikation

Zur Untersuchung der Leistungsfähigkeit des vorgestellten Verfahrens werden umfangreiche numerische Simulationen des LDA-Meßprozesses unter verschiedenen Randbedingungen [3] sowie reale Messungen durchgeführt. Neben der statistischen Unabhängigkeit der vorgebbaren Strömungs- und Seeding-Eigenschaften besteht der wesentliche Vorteil der Simulation in der aus dem verwendeten Simulationsmodell abgeleiteten a priori Kenntnis der zu erwartenden Ergebnisse. Daten realer Strömungen werden in einem Windkanal hinter einem Hindernis mittels eines Hitzdraht-Anemometers und eines parallel arbeitenden Laser-Doppler-Anemometers aufgenommen. Die Daten des HDA dienen sowohl als Referenz für die LDA-Daten als auch als Grundlage für die numerische Simulation der Teilchenbesähung.

### Ergebnisse

In Abb. 1 wurden auf der Grundlage einer HDA-Messung LDA-Zeitreihen mit unterschiedlicher Datenrate  $N$  (Datendichte  $N_D = 5$  und  $0,5$  Teilchen pro integralem Zeitmaß  $T$ ) simuliert. Dabei bestanden die einzelnen Blöcke [4] aus  $N = 300$  Meßwerten und es wurde über  $N_B = 20$  Blöcke (insgesamt 6000 Meßwerte) gemittelt. In Abb. 2 wurde parallel zum HDA mit einem LDA gemessen. Die Blockmittelung erfolgt hierbei über  $N_B = 200$  Blöcke mit je  $N = 100$  Meßwerten. Die Bestimmung des Spektrums mit der klassischen direkten Verarbeitung der LDA-Daten (**D**) zeigt, wie zu erwarten, eine Vergrößerung der Varianz der Schätzung bei abnehmender Teilchenrate. Die Sample-and-Hold-Rekonstruktion (**S+H**) zeigt deutlich das in [1] beschriebene Stepnoise und den Filtereffekt, deren Wirkungen sich mit abnehmender Teilchenrate verstärken. Die modellbasierte Bestimmung des Turbulenzspektrums (**MB**) erfolgte in Abb. 1 mit einem autoregressiven Modell 1. Ordnung und in Abb. 2 mit einem autoregressiven Modell 2. Ordnung. Die Ergebnisse zeigen, daß die modellbasiert ermittelten Leistungsdichtespektren keine nennenswerte Abhängigkeit von der Teilchenrate und eine sehr kleine Varianz haben. Sie zeigen jedoch nur die Eigenschaften des Spektrums, die im gewählten Modell enthalten sind. So konnte mit mit einem AR-Modell 1. Ordnung der Spektralverlauf im Inertial Subrange sehr gut wiedergegeben werden. Der Übergang in den dissipativen Bereich wird jedoch nicht erfaßt. Hierfür sind komplexere Ausgangsmodelle des Turbulenzspektrums erforderlich.

### Zusammenfassung

Die modellbasierte Schätzung des Turbulenzspektrums aus LDA-Daten liefert auch bei extrem niedrigen Datenraten und kurzen Datensätzen Ergebnisse mit einem wesentlich geringeren zufälligen Fehler als direkte oder rekonstruktionsbasierte Verfahren. Prozeßeigenschaften, die das Modell enthält (z. B. Grenzfrequenzen) werden mit großer statistischer Sicherheit detektiert. Das modellbasierte Verfahren liefert somit auch bei sehr niedrigen Teilchenraten und kurzen Datensätzen auswertbare Ergebnisse. Details, die nicht Bestandteil des Modells sind, werden unterdrückt. Deshalb muß das Prozeßmodell (Typ und Ordnung) besonders sorgfältig festgelegt werden.

Durch Verwendung von Modellen, die besser an den realen Prozeß angepaßt sind, kann der Anwendungsbereich deutlich erweitert werden. Durch eine modellbasierte Rekonstruktion des Geschwindigkeits-Zeit-Verlaufs kann im niederfrequenten Teil des Turbulenzspektrums eine zunehmende Unabhängigkeit vom gewählten Prozeßmodell erzielt werden, wodurch Fehler bei der Modellfestlegung korrigiert werden und das Modell lediglich die anwendungsspezifisch relevanten Eigenschaften im oberen Frequenzbereich ausreichend repräsentieren muß.

### Literatur

- [1] Adrian R.J., Yao C.S.: *Power spectra of fluid velocities measured by laser Doppler velocimetry*, Experiments in Fluids, vol. 5, pp. 17-28, 1987.
- [2] Fuchs W., Albrecht H., Nobach H., Tropea C., Graham L. J. W.: *Simulation and experimental verification of statistical bias in Laser Doppler Anemometry including non-homogeneous particle density* 6th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, LADOAN, Lisbon, 1992.
- [3] Fuchs W., Nobach H., Tropea C.: *Laser Doppler Anemometry Data Simulation: Application to Investigate the Accuracy of Statistical Estimators* AIAA Journal, vol. 32, no. 9, pp. 1883-1889, 1994.

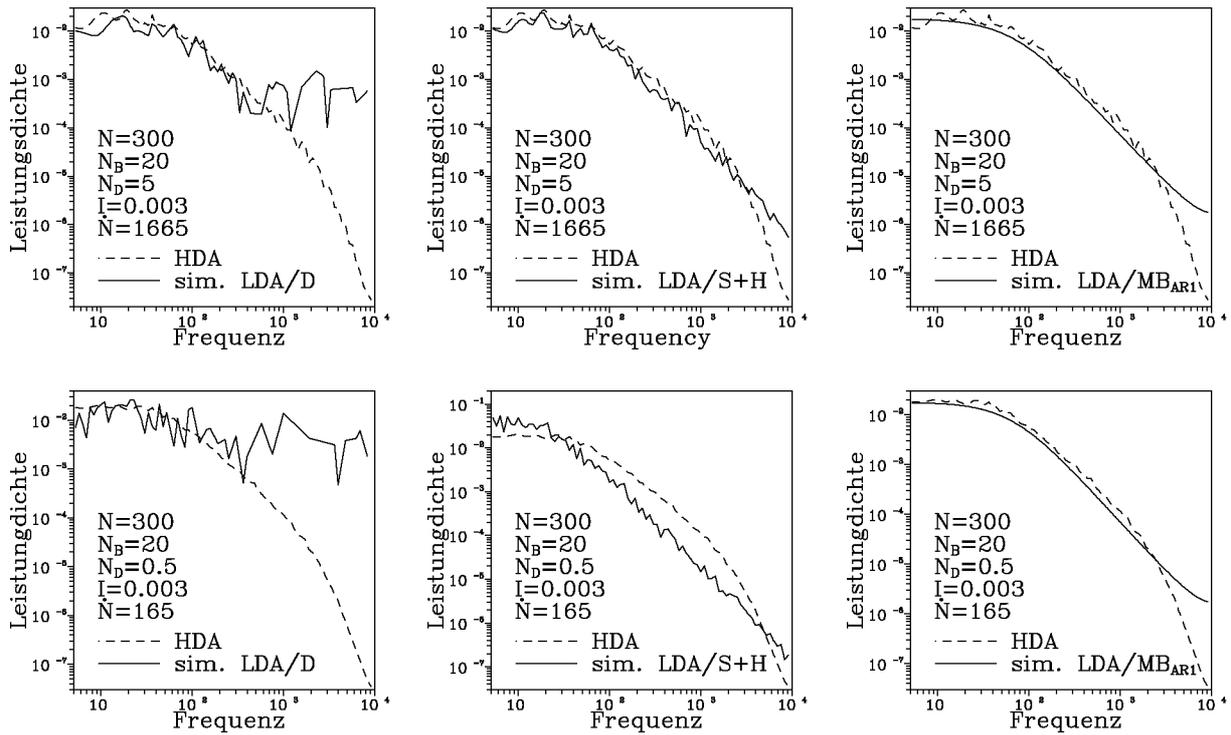


Abbildung 1: Meßpunkt 1 (HDA-Geschwindigkeits-Grundserie; simulierte Teilchenbesähung)

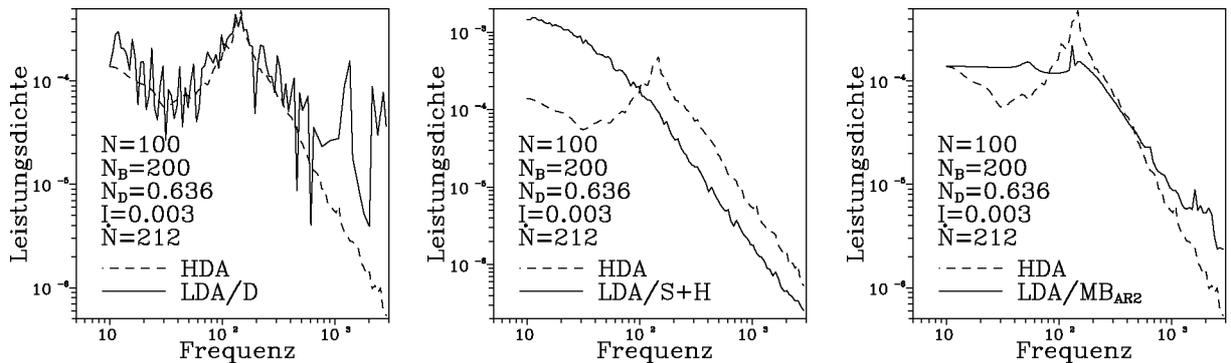


Abbildung 2: Meßpunkt 2 (LDA-Meßwertverarbeitung)

- [4] Gaster M., Roberts J.B.: *The spectral analysis of randomly sampled records by a direct transform* Proceedings of the Royal Society of London, ser. A, vol. 354, pp. 27-58, 1977.
- [5] Kay S. M.: *Modern Spectral Estimation: Theory & Application*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [6] Nobach H.: *Simulationen zum Einfluß von Teilchen-Seeding und Prozesseigenschaften auf die Ergebnisse konventioneller Methoden zur Turbulenzspektrumbestimmung beim Laser-Doppler-Anemometer*, Großer Beleg, Universität Rostock, 1993.
- [7] Nobach H.: *Signalrekonstruktion in der Laser-Doppler-Anemometrie*, Diplomarbeit, Universität Rostock, 1994.
- [8] Scott P. F.: *Random Sampling Theory and its Application to Laser Velocimeter Turbulence Spectral Measurements*, Report No. 74CRD216, Technical Information Series, General Electric Company, Corporate Research and Development, 1974.