Laser-Doppler-Messungen von Teilchenbeschleunigungen und der Dissipationsrate in einem runden Freistrahl

H. Nobach¹, C. Schneider², A. Dreizler², J. Janicka², C. Tropea¹

¹FG Strömungslehre und Aerodynamik, ²FG Energie- und Kraftwerkstechnik TU Darmstadt, Petersenstraße 30, 64287 Darmstadt

Zusammenfassung

Im Zusammenhang mit der Entwicklung neuer Signal- und Datenanalyseverfahren für die Laser-Doppler-Messtechnik wird ein Verifikationsexperiment an einem runden, turbulenten, isothermen Freistrahl (Luft) vorgestellt. Für eine möglichst gute Reproduzierbarkeit werden Laser-Doppler-Daten an mehreren Punkten in der Strahlmitte aufgenommen, da diese Ergebnisse besonders gut mit theoretischen und anderen experimentellen Daten verglichen werden können. An jedem Messpunkt werden einkomponentige Ein- und Zweipunktmessungen durchgeführt und hieraus verschiedene Strömungskenngrößen (Momente, Längen- und Zeitmaße sowie die Dissipationsrate) abgeleitet. Außerdem werden an jedem Messort LDA-Signale aufgenommen und aus dem zeitlichen Verlauf Partikelbeschleunigungen bestimmt. Die Ergebnisse der unterschiedlichen Verfahren werden untereinander und mit anderen experimentellen Untersuchungen verglichen sowie deren Abhängigkeit vom Messort untersucht bzw. geprüft.

1 Einleitung

Die Laser-Doppler-Messtechnik liefert stochastisch abgetastete Geschwindigkeitszeitreihen, wobei die Messrate mit dem Messwert korreliert ist. Darüber hinaus ist die zeitliche Auflösung begrenzt, da sich jeweils nur ein Teilchen im Messvolumen befinden darf, und die einzelnen Geschwindigkeitsmesswerte unterliegen Rauscheinflüssen. Deshalb werden für die Abschätzung von strömungstechnischen Kenngrößen (Momente, Längen- und Zeitmaße, Dissipationsrate) aus Laser-Doppler-Daten speziell angepasste Verfahren benötigt, welche ständig weiterentwickelt werden. Anhand von Verifikationsexperimenten soll die Einsatzreife der Laser-Doppler-Messtechnik sowie der Datenverarbeitungsverfahren zur Bestimmung derartiger Strömungskenngrößen nachgewiesen werden.

Aufgrund der einfachen Geometrie eines runden, turbulenten Freistrahls eignet sich diese Strömung besonders für die Durchführung von Verifikationsexperimenten. Die Ortsabhängigkeit verschiedener Strömungskenngrößen kann aufgrund von theoretischen und empirischen Gesetzmäßigkeiten beschrieben werden, wobei zunächst nur die Strahlmitte untersucht wird. Aus [5] und [7] können die folgenden Zusammenhänge für die voll entwickelte, isotrope Turbulenz angegeben werden:

$$m_{u} = \frac{U_{J}Bd}{x - x_{0}} \propto (x - x_{0})^{-1}$$
(1)

$$\sigma_u^2 \approx \frac{1}{16} \left(\frac{U_J B d}{x - x_0} \right)^2 \propto (x - x_0)^{-2} \tag{2}$$

$$Tu = \sqrt{\sigma_u^2}/m_u \approx 0.25 \tag{3}$$

$$L_f \approx 0.0385(x - x_0) \propto (x - x_0)^1$$
 (4)

mit dem Abstand x von der Düse, dem Geschwindigkeitsmittelwert m_u , der Geschwindigkeitsvarianz σ_u^2 , dem Turbulenzgrad Tu, dem integralen Längenmaß (longitudinal) L_f , dem Düsendurchmesser d, der Strahlgeschwindigkeit U_J am Austritt und den Kalibrierungsparametern B und x_0 . Der Parameter x_0 entspricht einem virtuellen Ursprung der Strömung. Die Kalibrierungsparameter sind für verschiedene experimentelle Untersuchungen bekannt, sie weichen aber voneinander ab und müssen

Abbildung 1: Zusammenhang zwischen verschiedenen Strömungskenngrößen für isotrope Turbulenz (T_{λ} – Taylor-Zeitmaß; λ_f – Taylor-Längenmaß, longitudinal; m_u – Geschwindigkeitsmittelwert; ν – Viskosität; σ_u^2 – Geschwindigkeitsvarianz; ε – Dissipationsrate; k – turbulente kinetische Energie; L – charakteristisches Längenmaß; L_f – integrales Längenmaß, longitudinal; T_L – integrales Zeitmaß)

daher für das durchgeführte Experiment bestimmt werden. Mittels der in Abbildung 1 dargestellten Zusammenhänge für isotrope Turbulenz wird dann die Ortsabhängigkeit der anderen untersuchten Strömungskenngrößen abgeleitet.

Alle in Abbildung 1 aufgeführten Parameter lassen sich aus Zeitreihen der Strömungsgeschwindigkeit abschätzen. Weitere, sehr interessante Zusammenhänge ergeben sich mit der Möglichkeit, Beschleunigungen in der Strömung zu messen. Die Hitzdraht-Anemometrie ermöglicht zeitlich aufgelöste, räumlich feste Beschleunigungsmessungen, nämlich in Euler-Koordinaten. Die Messung in Lagrange-Koordinaten ist derzeit noch nicht sehr weit verbreitet. In [6] ist ein optisches System zur Verfolgung von Teilchenbahnen beschrieben, welches derartige Beschleunigungsmesswerte liefert. Doch auch mit dem Laser-Anemometer ist eine solche Beschleunigungsmessung möglich [2].

Aus der Annahme von Kolmogorov [1] wurde die Varianz der Teilchenbeschleunigungen in Abhängigkeit von der Dissipationsrate in [3] und [6] als

$$\sigma_a^2 = a_0 \varepsilon^{3/2} \nu^{-1/2} \propto \varepsilon^{3/2} \tag{5}$$

angegeben, wobei *a*₀ eine Konstante ist. Wenn nun auch das Ähnlichkeitsverhalten der Dissipationsrate entlang der Mittellinie eines Freistrahls berücksichtigt wird, so ergibt sich die Abhängigkeit der Beschleunigungsvarianz von der Entfernung zum Strahlaustritt zu

$$\sigma_a^2 \propto (x - x_0)^{-6}.\tag{6}$$

Zur Verifikation der Parameterschätzung aus Laser-Doppler-Daten und der Beschleunigungsmessung einzelner Streuteilchen werden in der Mitte eines Freistrahls Ein- und Zweipunktmessungen der Geschwindigkeit und Einpunktmessungen mit anschließender Beschleunigungsbestimmung durchgeführt. In Abschnitt 2 und Abschnitt 3 werden der Messaufbau und die Strömungskonfiguration beschrieben. Die Bestimmung der Strömungskenngrößen aus den Laser-Doppler-Daten ist in Abschnitt 4 dargestellt. Die Ergebnisse der Untersuchungen werden in Abschnitt 5 diskutiert und in Abschnitt 6 zusammengefasst.

2 Experimenteller Aufbau

Die Messung der momentanen Geschwindigkeiten in dem turbulenten, isothermen Freistrahl wurden mit zwei fasergekoppelten LDA-Sonden durchgeführt. Ein Ar⁺-Laser mit einer maximalen Leistung



Abbildung 2: Prinzip Messaufbau

von 5W dient als Lichtquelle und wird im Multiline-Mode mit einer Leistung von 500 mW betrieben. Es werden die beiden Wellenlängen bei $\lambda_1 = 514.5$ nm und $\lambda_2 = 488$ nm genutzt. Der gemischte Laserstrahl des Ar⁺-Lasers wird in einer Braggzelle in die entsprechenden Farben sowie je zwei Strahlen gleicher Intensität aufgespalten, von denen jeweils einer um 40 MHz frequenzverschoben wird. Die Sonden werden im Rückstreumodus mit je einer Linse mit f = 310 mm Fokussierlänge betrieben. Damit werden Messvolumen der Größe 400 µm × 50 µm generiert. Das Streulicht wird in Photomultipliern gewandelt, denen Interferenzfilter zur Farbtrennung vorgeschaltet sind. Danach werden die LDA-Bursts in Mischern um die 40 MHz bereinigt, die den Signalen überlagert sind, und die Bursts können zudem in einen für den Burstkorrelator IFA750 der Firma TSI optimalen Frequenzbereich verschoben werden. Es werden pro Messpunkt und Kanal 100 000 Ereignisse bei einer mittleren Datenrate von ca. 7 500 Hz im RANDOM-mode (free running) aufgenommen. Als Impfpartikel kommen Magnesiumoxidpartikel mit einer Größenverteilung d < 1 µm zum Einsatz.

Für die Zweipunktmessungen werden zu Beginn einer Serie die Messvolumen mittels einer Lochblende mit 30 µm Durchmesser so übereinander gelegt, dass alle vier Strahlen durch die Lochblende hindurchtreten. Durch Traversierung in Richtung der Hauptachse des Messvolumens werden die Strahltaillen auf $\pm 10 \,\mu$ m genau überlagert. Die Traversiereinheit des bewegten Kanals ist mit Schrittmotoren ausgestattet und besitzt eine Traversiergenauigkeit von $\Delta x < 10 \,\mu$ m. Sie wird von einem PC mittels einer Einsteckkarte gesteuert. Der schematische Aufbau der Zweipunktmessanordnung ist in Abbildung 2 dargestellt. Das bewegte Messvolumen wird bezüglich des festen Messvolumens jeweils in positiver und in negativer Richtung traversiert.

3 Die Strömungskonfiguration

Der isotherme Freistrahl ist im EKT-Standardbrenner realisiert [4]. Eine Brennerlanze mit dem Durchmesser d = 8 mm wird wie in Abbildung 3 dargestellt in einen Brennertopf montiert, der zudem einen umgebenden Hüllstrom bereitstellt. Der Hüllstrom besitzt ein Blockprofil am Austritt mit einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit von 0.5 m/s und einem isotropen, homogenen Turbulenzgrad von 1%. Damit ist eine definierte Randbedingung für die Ausbildung des isothermen Freistrahls sichergestellt und die vom Freistrahl eingesaugte Luft ist mit Partikeln geimpft. Der Freistrahl wird mit zwei unterschiedlichen Luftvolumenströmen und damit Reynoldszahlen betrieben. Die wichtigsten Eckdaten sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Die Länge der Brennstofflanze ist dabei größer 40D, sodass am Austritt eine voll ausgebildete turbulente Rohrströmung vorliegt.



Abbildung 3: Skizze der Strömungskonfiguration. Die Länge des Einlaufs ist nicht maßstabsgerecht, die Gitter im Hüllstrom dienen zur Homogenisierung desselbigen.

		Konf. 1	Konf. 2
Außendurchmesser	[mm]	140	140
Innendurchmesser	[mm]	8	8
Geschwindigkeit innen	[m/s]	35.9	71.8
Geschwindigkeit außen	[m/s]	0.5	0.5
Volumenstrom innen	$[m^3/h]$	6.5	13
Volumenstrom außen	[m ³ /h]	27.6	27.6
Reynoldszahl		20 000	40 000

Tabelle 1: Start- und Randbedingungen der Messobjekte

4 Signal- und Datenverarbeitung

Aus den Datensätzen der Einpunktmessungen werden zunächst zeitliche Autokorrelationsfunktionen

$$R(\tau) = \mathsf{E}\left\{u(t)u(t+\tau)\right\} \tag{7}$$

sowie Strukturfunktionen

$$D(\tau) = \mathsf{E}\left\{\left[u(t) - u(t+\tau)\right]^2\right\}$$
(8)

bestimmt. Hierbei wird ein Slotverfahren verwendet, wobei einige Neuentwicklungen (Local Normalization, Fuzzy Slotting Technique, Local Time Estimation, Wichtung) einfließen. Diese werden sowohl unter Verwendung der Taylor-Hypothese als auch einer erweiterten Transformation, welche mögliche Schwankungen der momentanen Strömungsgeschwindigkeit berücksichtigt, in die räumlichen Entsprechungen

$$R(\xi) = \mathsf{E}\left\{u(x)u(x+\xi)\right\} \tag{9}$$

bzw.

$$D(\xi) = \mathsf{E}\left\{ [u(x) - u(x + \xi)]^2 \right\}$$
(10)

überführt. Aus den Korrelations- bzw. Strukturfunktionen wird mittels einer Modellanpassung das Taylor-Zeitmaß T_{λ} bzw. das Taylor-Längenmaß λ_f (longitudinal) sowie das integrale Zeitmaß T_L und das integrale Längenmaß L_f (longitudinal) bestimmt. Mittels der in Abbildung 1 dargestellten Zusammenhänge für isotrope Turbulenz werden dann die anderen Strömungskenngrößen abgeschätzt. Die Ergebnisse werden mit den theoretischen bzw. empirischen Gesetzmäßigkeiten (Abschnitt 1) verglichen.

Bei der Zweipunktmessung wird für jeden Messort jeweils ein Messvolumen fixiert und das zweite etwas in Hauptströmungsrichtung (Messrichtung) bzw. entgegen der Strömung verschoben. Für jeden Messort werden mehrere Messvolumenabstände eingestellt. Die Daten werden ohne Koinzidenz (free



Abbildung 4: Experimentell bestimmte Momente des Freistrahls

running) aufgenommen und die Kreuzkorrelations- bzw. Strukturfunktionen mittels eines Slotverfahrens berechnet. Aus den räumlichen Korrelations- und Strukturfunktionen wird dann wiederum das Taylor-Längenmaß bestimmt und hieraus mittels der Zusammenhänge in Abbildung 1 die Dissipationsrate und die anderen Strömungskenngrößen abgeschätzt. Diese werden dann den Ergebnissen der Einzelpunktmessungen sowie den theoretischen bzw. empirischen Gesetzmäßigkeiten aus Abschnitt 1 gegenübergestellt.

In der dritten Messreihe werden an jedem Messort 5 Datensätze mit jeweils 200 Doppler-Signalen mit einem Oszilloskop aufgenommen, digitalisiert und anschließend offline ausgewertet. Dabei wird neben der Partikelgeschwindigkeit auch die Beschleunigung bestimmt [2]. Aus dem Ensemble der Beschleunigungsmesswerte einzelner Streuteilchen wird die Beschleunigungsvarianz bestimmt und der Zusammenhang mit dem Abstand vom Strahlaustritt und der Dissipationsrate untersucht.

5 Ergebnisse

5.1 Momente

Aus den Messreihen (Einpunkt-, Zweipunkt- und Beschleunigungsmessungen) werden zunächst der Geschwindigkeitsmittelwert und die Varianz bestimmt. Bei den Ein- und Zweipunktmessungen wird dabei eine Aufenthaltszeitwichtung der Einzelmesswerte durchgeführt. Abbildung 4 zeigt die Ergebnisse. Abweichend von den in [5] und [7] angenommenen Geschwindigkeitsprofilen mit konstanter Ausströmgeschwindigkeit über dem Düsenquerschnitt handelt es sich bei diesem Experiment um ein ausgeprägtes Rohrprofil. Deshalb sind Abweichungen der Parameter im Vergleich zu diesen Untersuchungen zu erwarten. In Tabelle 2 sind die Regressionsparameter nach Gleichungen (1) und (2) zusammengefasst. Der virtuelle Ursprung ist dabei sowohl für die unterschiedlichen Reynoldszahlen als auch für Geschwindigkeitsmittelwert und -varianz unterschiedlich. Dadurch ergibt sich ein leichter

	${\sf Re}=20000$	${\sf Re}=40000$
Geschwindigkeitsmittelwert	$U_{J}B = 320$	$U_{J}B = 536$
	$x_0 = 0.72d$	$x_0 = 3.65d$
Geschwindigkeitsvarianz	$U_{J}B = 331$	$U_{J}B = 579$
	$x_0 = -0.69d$	$x_0 = 0.82d$

Tabelle 2: Regressionsparameter

Trend des Turbulenzgrades (Abbildung 4c). Unter Berücksichtigung des unterschiedlichen virtuellen Ursprunges konnten die erwarteten Zusammenhänge aus Abschnitt 1 bestätigt werden. Für den Vergleich der abgeschätzten Dissipationsraten im folgenden Abschnitt werden die virtuellen Ursprünge für die Geschwindigkeitsvarianz verwendet.

5.2 Dissipationsrate

Aus den Ein- und Zweipunktmessungen werden die Korrelations- und Strukturfunktionen berechnet. Aus der Korrelationsfunktion wird dann zunächst das integrale Zeitmaß bzw. durch entsprechende Transformationen das integrale Längenmaß bestimmt, welches durch die Zusammenhänge in Abbildung 1 in eine entsprechende Dissipationsrate überführt wird. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5a dargestellt. Dabei variieren die Ergebnisse mit den Einstellungen der Signalverarbeitung (v. a. die Slotbreite). Dennoch konnte die zu erwartende Abhängigkeit der Dissipationsrate vom Messort bestätigt werden.

Sowohl aus den Korrelationsfunktionen $R(\tau)$ und $R(\xi)$ als auch aus den Strukturfunktionen $D(\tau)$ und $D(\xi)$ lässt sich mittels einer Modellanpassung an den quadratischen Bereich für kleine Zeitverschiebungen τ bzw. räumliche Abstände ξ das Taylor-Maß und daraus die Dissipationsrate bestimmen. Entsprechende Ergebisse sind in Abbildung 5b und c für die Einpunktmessungen und in Abbildung 5d für die Zweipunktmessungen dargestellt. Die Abschätzung des Taylor-Maßes erfolgt im Bereich sehr kleiner Zeitverschiebungen τ bzw. räumlicher Abstände ξ , in dem aufgrund der begrenzten zeitlichen und räumlichen Auflösung sehr wenig Daten vorhanden sind. Außerdem bewirken bereits kleine Schätzung. Daher streut die abgeschätzte Dissipationsrate hier wesentlich stärker als bei der Abschätzung aus den Integralmaßen. Dennoch konnte in allen Fällen die zu erwartende Abhängigkeit der Dissipationsrate vom Messort bestätigt werden.

5.3 Beschleunigungsmessung

Aus den insgesamt 1000 aufgenommenen Streusignalen werden jeweils die Geschwindigkeit und die Beschleunigung bestimmt. Der Mittelwert und die Varianz der Geschwindigkeitswerte sind in Abbildung 4 den Ergebnissen aus den Ein- und Zweipunktmessungen gegenübergestellt. Dabei ergeben sich keine signifikanten Abweichungen. In Abbildung 6a ist die Varianz der Beschleunigungsmesswerte in Abhängigkeit vom Messort dargestellt. Dabei wurden die Beschleunigungsvarianzen für die 5 Datensätze mit jeweils 200 Signalen getrennt berechnet und dargestellt. Es ergeben sich keine auffällig großen Unterschiede zwischen den Datensätzen. Außerdem zeigen die Ergebnisse einen eindeutigen Zusammenhang mit dem Abstand von der Düse. Jedoch sind die so bestimmten Beschleunigungsvarianzen wesentlich größer als die nach [6] zu erwartenden (ca. Faktor 1000), und sie haben auch nicht die erwartete $(x - x_0)^{-6}$ -Abhängigkeit sondern fallen mit $(x - x_0)^{-4}$. Das legt die Vermutung nahe, dass die Unsicherheit der Beschleunigungsmessung wesentlich größer ist als die tatsächlichen Größen. Zur Prüfung dieser These wurde die Signalaufbereitung aus [2] derart abgewandelt, dass aus einem Signal jeweils zwei Beschleunigungsmesswerte berechnet wurden. Die Fenster zur Bestimmung der momentanen Geschwindigkeit aus einem Signalausschnitt wurden so platziert, dass die einzelnen Geschwindigkeitsschätzungen etwa gleiche Signalqualitäten haben jedoch bei den beiden Beschleunigungsmessungen unterschiedlich weit voneinander entfernt sind (Faktor 2). Für beide Reihen von Beschleunigungsmesswerten wurden die Varianzen bestimmt. Abbildung 6b zeigt das Verhältnis der Beschleunigungsvarianzen. Sind die einzelnen Beschleunigungsmesswerte durch Teilchenbeschleunigungen hervorgerufen, so ändert sich der Messwert mit dem Abstand der Fenster nur geringfügig,



Abbildung 5: Experimentell bestimmte Disspationsrate des Freistrahls: Abschätzung a) aus integralem Zeit- bzw. Längenmaß, b) aus Modellanpassung der Korrelationsfunktion, c) Modellanpassung der Strukturfunktion und d) aus der Zweipunktmessung bei unterschiedlichen Einstellungen der Signalverarbeitung



Abbildung 6: Varianz der Beschleunigungsmesswerte

wodurch sich ein Verhältnis der Beschleunigungsvarianzen von 1 ergibt. Sind die gemessenen Beschleunigungswerte nur auf die Schwankung der einzelnen Geschwindigkeitsmessungen zurückzuführen, so ergibt sich ein Verhältnis von 4, was durch die Ergebnisse in Abbildung 6b bestätigt wird. Damit können derzeit keine weiteren Schlüsse aus der Abhängigkeit der Beschleunigungsvarianz vom Messort gezogen werden. Die beobachtete $(x - x_0)^{-4}$ -Abhängigkeit ist ausschließlich auf veränderte Bedingungen (v. a. Burstlänge) bei der Abschätzung der Beschleunigung zurückzuführen.

6 Zusammenfassung

Die durchgeführten Untersuchungen haben gezeigt, dass der Messaufbau und die Strömungskonfiguration geeignet sind, sowohl die eingesetzte Messtechnik als auch die Signal- und Datenverarbeitung zu validieren. Die Verarbeitung von Laser-Doppler-Daten zu Strömungskenngrößen konnte erheblich verbessert werden, wobei verschiedene Transformationen von Zeit- zu Längengrößen und umgekehrt eingesetzt wurden. Die aus theoretischen und empirischen Gesetzmäßigkeiten bekannten Abhängigkeiten der Strömungskenngrößen konnten bestätigt werden. Dadurch ist gleichzeitig der Nachweis erbracht, dass mit der Laser-Doppler-Messtechnik und entsprechender Datenverarbeitung Strömungskenngrößen wie z. B. die Dissipationsrate auf verschiedenen Wegen bestimmt werden können. Durch den Vergleich der Ergebnisse konnte die Gültigkeit der unterschiedlichen Abschätzungen geprüft und gleichzeitig deren Zuverlässigkeit bestimmt werden. Für den experimentellen Einsatz ergibt sich daraus, dass durch die Abschätzung über die integralen Zeit- bzw. Längenmaße aus Einpunktmessungen zuverlässige Werte erzielt werden können.

Die Abhängigkeit der Partikelbeschleunigung vom Messort konnte durch diese Untersuchungen nicht geprüft werden, da die Streuung der Beschleunigungswerte nicht durch die Bewegung der Teilchen, sondern ausschließlich durch die Schätzunsicherheit der Geschwindigkeitsbestimmung hervorgerufen wurde, obwohl die Genauigkeit der Geschwindigkeitsmesswerte selbst ausreichte. Erst die Abschätzung der Beschleunigung aus dem Geschwindigkeitsgradienten über einem sehr kurzen Zeitintervall führt zu derart großen Schwankungen. Das in [2] eingesetzte System zeigt wesentlich kleinere Schwankungen der Beschleunigungsmesswerte aufgrund der Schätzunsicherheit, so dass statistische Kenngrößen der Beschleunigungsmessungen (Histogramm und Momente bis vierter Ordnung) sinnvoll bestimmt werden konnten. Hauptursache für diesen Unterschied ist die unterschiedliche Streulichtleistung bei Vorwärts- und Rückwärtsstreuung.

Trotz des zufälligen Charakters der einzelnen Beschleunigungsmesswerte hat sich eine eindeutige Abhängigkeit der Beschleunigungsvarianz vom Abstand des Messortes zum Düsenaustritt ergeben, welche ausschließlich durch veränderte Bedingungen der Signalverarbeitung (v. a. Burstlänge) verursacht wird. Um Fehlinterpretationen zu verhindern wurde eine Methode zur Validierung der Beschleunigungsmesswerte getestet, die eindeutig den zufälligen Charakter der vorliegenden Messung aufdecken konnte.

Diese Untersuchungen wurden durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft gefördert (SFB 568).

Literatur

- [1] A N Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30:301–305, 1941.
- [2] B Lehmann, H Nobach, and C Tropea. Measurement of acceleration using the laser Doppler technique, 2002. Meas. Sci. Technol. (accepted for publication).
- [3] A S Monin and A M Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics Vol II*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1975. Sec. 18.
- [4] D G Pfuderer, A Neuber, G Früchtel, E P Hassel, and J Janicka. Turbulence modulation in jet diffusion flame: Modeling and experiments. *Combustion and Flame*, 106(3):301–317, 1996.
- [5] S B Pope. Turbulent Flows. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [6] G A Voth, K Satyanarayan, and E Bodenschatz. Lagrangian acceleration measurements at large Reynolds numbers. *Phys Fluids*, 10:2268–2280, 1998.
- [7] I Wygnanski and H Fiedler. Some measurements in the self-preserving jet. J. Fluid Mech., 38:577–612, 1969.