

# Verarbeitung von LDA-Signalen beschleunigter Streuteilchen

Holger Nobach

FG Strömungslehre und Aerodynamik, TU Darmstadt  
Petersenstraße 30, 64287 Darmstadt

## Zusammenfassung

Die Informationsgewinnung aus einem aufgenommenen LDA-Burst setzt normalerweise eine konstante Doppler-Frequenz während der Durchquerung des Streuteilchens durch das Messvolumen voraus. Diese Voraussetzung ist jedoch für beschleunigte Streuteilchen nicht erfüllt. Dieser Beitrag stellt ein Verfahren vor, mit dem Burstsignale von beschleunigten Streuteilchen verarbeitet werden können. Dabei werden die entsprechenden Signalparameter durch ein direktes Verfahren aus der Fourier-Transformierten gewonnen.

## 1 Einführung

Bei der LDA-Signalverarbeitung wird normalerweise eine konstante Doppler-Frequenz innerhalb des gesamten Bursts vorausgesetzt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wird entweder eine gemittelte Frequenz bestimmt oder es kommt sogar zu Fehlmessungen, falls das Signal nicht bereits durch entsprechende Prüfroutinen aus dem Datenstrom herausgefiltert wird. In [3] ist ein Anwendungsfall der LDA-Messtechnik dargestellt, bei dem signifikante Teilchenbeschleunigungen auftreten, die zu entsprechenden Frequenzgradienten innerhalb eines Bursts führen. Die Analyse des Signals und die Bestimmung der Teilchengeschwindigkeit und -beschleunigung erfolgte dabei mittels der Kurzzeit-FFT, wobei der Verlauf der Doppler-Frequenz anhand von Spektren, die aus teilweise überlappenden Signalausschnitten gewonnen wurden, bestimmt wurde. Praktisch wird dabei für jeden Ausschnitt die mittlere Doppler-Frequenz bestimmt. Diese Mittelung schränkt die Dynamik des Verfahrens bei Frequenzänderungen ein und begrenzt somit die Genauigkeit der Beschleunigungsbestimmung. Die Wahl der Fenstergröße stellt dadurch einen Kompromiss zwischen Folgevermögen bei großen Frequenzgradienten und Genauigkeit der lokalen Frequenzbestimmung dar.

Bessere Ergebnisse sind durch eine parametrische Signalverarbeitung zu erzielen, die im verwendeten Signalmodell die zeitliche Veränderung der Doppler-Frequenz berücksichtigt. Unabhängig von den verwendeten Verarbeitungsalgorithmen hängt die Möglichkeit der Interpretation einer Frequenzdrift innerhalb des Burstsignals von der Äquidistanz der Interferenzstreifen im Messvolumen ab.

Im folgenden Abschnitt wird das Modell von Burstsignalen beschleunigter Teilchen hergeleitet. Abschnitt 3 geht detailliert auf die Verarbeitung derartiger Signale und die Schätzung der Signalparameter ein. In Abschnitt 4 wird die Leistungsfähigkeit des neuen Verfahrens im Vergleich zu anderen eingeschätzt. Die Perspektiven für den experimentellen Einsatz werden in Abschnitt 5 dargelegt. Abschließend werden die Erkenntnisse kommentierend zusammengefasst.

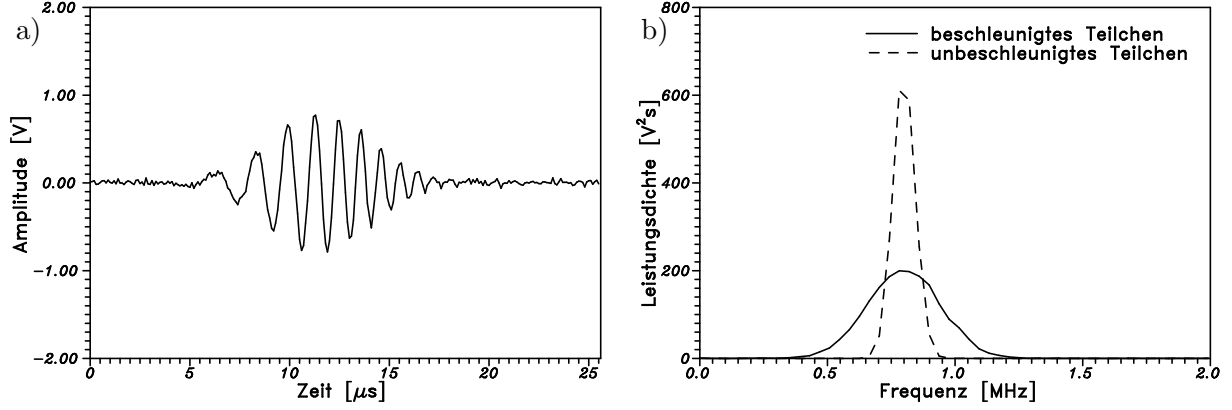


Abbildung 1: a) Verrauschtes LDA-Signal eines beschleunigten Streuteilchens und b) Leistungsdichtespektrum des Burstsignals eines beschleunigten Teilchens im Vergleich zu einem unbeschleunigten Teilchen

## 2 Signalmodell

Durch die Beschleunigung eines Streuteilchens während der Durchquerung des LDA-Messvolumens tritt abweichend vom bekannten harmonischen Signal mit Gauß-förmiger Hüllkurve eine lineare Drift der Doppler-Frequenz auf. Definiert man als „Doppler-Frequenz“  $f_D$  die Momentanfrequenz in der Burstmitte (Zeitpunkt größter Signalamplitude = Ankunftszeit  $T_0$ ), so ergibt sich als Modell für den zeitlichen Frequenzverlauf

$$f(t) = \gamma(t - T_0) + f_D, \quad (1)$$

wobei der Parameter  $\gamma$  die Stärke der zeitlichen Drift der Frequenz aufgrund der Teilchenbeschleunigung repräsentiert. Durch  $a = \gamma\Delta x$  ist dann über den Interferenzstreifenabstand  $\Delta x$  der Zusammenhang zur Teilchenbeschleunigung  $a$  gegeben. Für den Gradienten der Phase folgt daraus

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 2\pi f(t) = 2\pi [\gamma(t - T_0) + f_D], \quad (2)$$

woraus durch Integration der zeitliche Phasenverlauf zu

$$\phi(t) = \pi\gamma(t - T_0)^2 + 2\pi f_D(t - T_0) + \phi_0 \quad (3)$$

bestimmt wird. Das Modell des entsprechenden Bursts ist demnach

$$u(t) = Ae^{-\eta(t-T_0)^2} \cos [\pi\gamma(t - T_0)^2 + 2\pi f_D(t - T_0) + \phi_0] \quad (4)$$

mit einem Gauß-förmigen Intensitätsverlauf. Das Eingangssignal wird als gefiltert und somit frei von Gleichanteilen angenommen (Abb. 1a).

## 3 Signalverarbeitung

Zur Herleitung der Fourier-Transformierten eines Burstsignals mit Teilchenbeschleunigung wird zunächst aus Gleichung (4) ein reduziertes Modell ohne Beschleunigung

$$u(t) = Ae^{-\eta(t-T_0)^2} \cos [2\pi f_D(t - T_0) + \phi_0] \quad (5)$$

herausgelöst. Die Fourier-Transformierte dieses Signals lässt sich explizit angeben

$$\text{FT}\{u(t)\}(f) = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} e^{-\pi^2(f-f_D)^2\eta^{-1} - i(2\pi f T_0 - \phi_0)}, \quad (6)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass  $f_D$  ausreichend groß ist und keine gegenseitige Beeinflussung der Spektralpeaks bei  $f_D$  und  $-f_D$  zu berücksichtigen ist.

Wird nun für das Signalmodell mit Beschleunigung  $\eta$  durch  $\eta - i\pi\gamma$  bzw.  $\eta + i\pi\gamma$  ersetzt, so erhält man

$$u(t) = \frac{A}{2} e^{-\eta(t-T_0)^2 + i[\pi\gamma(t-T_0)^2 + 2\pi f_D(t-T_0) + \phi_0]} = \frac{A}{2} e^{-(\eta - i\pi\gamma)(t-T_0)^2 + i[2\pi f_D(t-T_0) + \phi_0]} \quad (7)$$

als Zeitsignal und

$$\text{FT}\{u(t)\}(f) = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\eta - i\pi\gamma}} e^{-\pi^2(f-f_D)^2(\eta - i\pi\gamma)^{-1} - i(2\pi f T_0 - \phi_0)} \quad (8)$$

als Fourier-Transformation.

Mit der Substitution

$$\eta - i\pi\gamma = B e^{iP} = e^{\ln B + iP} \quad (9)$$

erhält man

$$\text{FT}\{u(t)\}(f) = \frac{A\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\ln B}{2} - i\frac{P}{2} - \pi^2(f-f_D)^2 e^{-\ln B - iP} - i(2\pi f T_0 - \phi_0)}. \quad (10)$$

Als Real- und Imaginärteil des komplexen Logarithmus erhält man das logarithmische Amplituden- und das Phasenspektrum

$$\begin{aligned} \ln\{\text{FT}\{u(t)\}(f)\} &= \ln\left(\frac{A\sqrt{\pi}}{2}\right) - \frac{\ln B}{2} - \frac{\pi^2 \cos(-P)}{B}(f-f_D)^2 \\ &+ i\left[-2\pi f T_0 + \phi_0 - \frac{P}{2} - \frac{\pi^2 \sin(-P)}{B}(f-f_D)^2\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Sowohl das Amplituden- als auch das Phasenspektrum sind Polynome 2. Grades

$$\ln\{\text{FT}\{u(t)\}(f)\} = a_1(f-f_D)^2 + c_1 + i[a_2(f-f_D)^2 + b_2(f-f_D) + c_2] \quad (12)$$

mit

$$a_1 = -\frac{\pi^2 \cos(-P)}{B} \quad (13) \quad a_2 = -\frac{\pi^2 \sin(-P)}{B} \quad (15)$$

$$b_2 = -2\pi T_0 \quad (16)$$

$$c_1 = \ln\left(\frac{A\sqrt{\pi}}{2}\right) - \frac{\ln B}{2} \quad (14) \quad c_2 = 2\pi f_D T_0 + \phi_0 - \frac{P}{2} - 2\pi f_D T_0. \quad (17)$$

Mit  $f-f_D$  als Argument tritt im Polynom des Amplitudenverlaufs kein linearer Anteil auf. Daraus folgt, dass die Dopplerfrequenz  $f_D$  trotz der Beschleunigung durch das Maximum des Amplitudenspektrums bestimmt werden kann.

Daraus ergibt sich folgendes Vorgehen bei der Signalanalyse. Zunächst wird das aufgenommene und äquidistant mit der Frequenz  $f_s$  abgetastete Signal  $u(k\Delta t)$  mit  $N$  Abtastwerten mittels der diskreten Fourier-Transformation

$$\text{DFT}\{u(k\Delta t)\}(j\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} u(k\Delta t) e^{-2\pi i k j / N} \quad (18)$$

in den Spektralbereich überführt wobei  $\Delta t = 1/f_s$  und  $\Delta f = f_s/N$ . Als Betrag und Argument der komplexen Fourier-Koeffizienten erhält man das Amplituden- (Abb. 1b) und

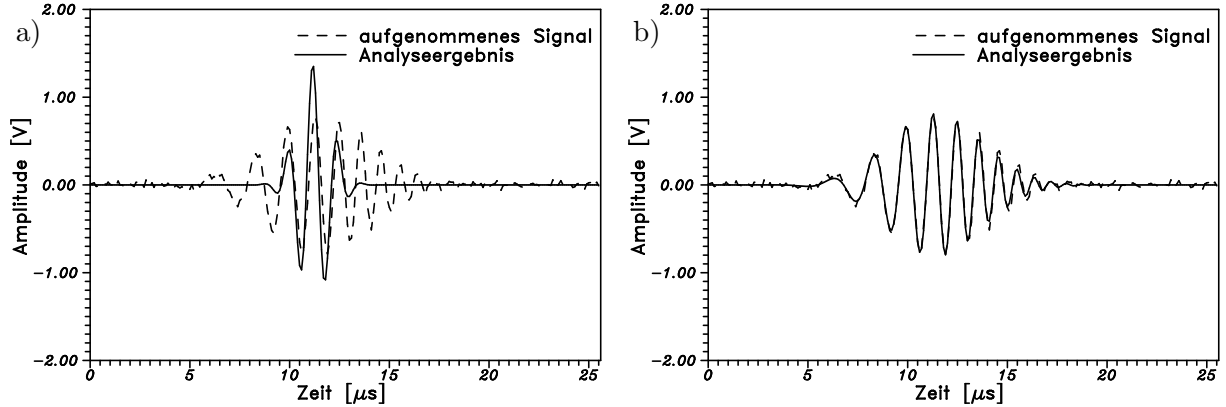


Abbildung 2: Analyseergebnisse a) ohne und b) mit Berücksichtigung der Teilchenbeschleunigung

das Phasenspektrum. Im Amplitudenspektrum ist das Maximum zu suchen. Nach Logarithmierung des Amplitudenspektrums bilden das Maximum und die beiden benachbarten Werte die Basis für eine Polynominterpolation 2. Grades. Bis hier ist das Verfahren somit identisch zu dem weit verbreiteten Verfahren für unbeschleunigte Teilchen [1].

Nach der Korrektur von  $2\pi$ -Mehrdeutigkeiten des Phasenverlaufs wird nun auch im Phasenspektrum eine Polynominterpolation 2. Grades an den gleichen Stellen durchgeführt. Aus dem Maximum des Amplitudeninterpolationspolynoms erhält man die Dopplerfrequenz  $f_D$ . Die Koeffizienten der beiden Interpolationspolynome werden so transformiert, dass sie  $f - f_D$  als Argument haben, wobei das lineare Glied des Amplitudeninterpolationspolynoms verschwindet. Die anderen Koeffizienten entsprechen denen in Gleichung (12) und werden in das Gleichungssystem (13–17) eingesetzt. Als Lösung erhält man

$$B = \frac{\pi^2}{|a_1 + ia_2|} \quad (19)$$

$$P = \arg\{-a_1 + ia_2\} \quad (20)$$

$$\gamma = -\frac{B}{\pi} \sin P \quad (21)$$

$$\eta = B \cos P \quad (22)$$

$$T_0 = -\frac{b_2}{2\pi} \quad (23)$$

$$A = \frac{2}{f_s \sqrt{\pi}} e^{c_1 + \frac{\ln B}{2}} \quad (24)$$

$$\phi_0 = c_2 + \frac{P}{2} + 2\pi f_D T_0 \quad (25)$$

wobei in die Berechnung der Signalamplitude  $A$  die Abtastfrequenz  $f_s$  eingeht, da die DFT diesen Faktor in das Amplitudenspektrum einbringt.

Abb. 2 zeigt im Vergleich die Analyseergebnisse ohne und mit Berücksichtigung der Beschleunigung im Signalmodell für das Signal in Abb. 1a. Durch die Teilchenbeschleunigung kommt es im Amplitudenspektrum zu einer starken Verbreiterung des Peaks gegenüber einem unbeschleunigten Teilchen (Abb. 1b). Für eine Signalverarbeitung, die von unbeschleunigten Teilchen ausgeht, erscheint ein solches Spektrum äquivalent zu dem eines extrem kurzen Signals. Daher wird die Signalbreite in Abb. 2a wesentlich zu gering abgeschätzt, während die Dopplerfrequenz durchaus korrekt bestimmt wird, wenn auch mit einer großen Schätzunsicherheit. Der Vergleich des Analyseergebnisses mit dem aufgenommenen Signal zeigt jedoch deutlich die Unzulänglichkeit des Signalmodells.

Im Gegensatz dazu wird durch die Berücksichtigung der Teilchenbeschleunigung bei der Signalauswertung eine sehr gute Deckung der Signale erreicht (Abb. 2b).

## 4 Verifikation

Zur Untersuchung der Eigenschaften des neuen Analyseverfahrens wurden umfangreiche statistische Simulationsrechnungen durchgeführt. Die Signalanalyse wurde parallel dazu

auch mit anderen Verfahren durchgeführt. Als Kriterium für die Leistungsfähigkeit wurden die Erwartungstreue durch die Berechnung des Mittelwertes im Vergleich zur Simulationsvorgabe und die Effizienz durch die Berechnung der Schätzvarianz im Vergleich zur Cramér-Rao-Grenze herangezogen. Die wesentlichen Vergleichsergebnisse werden exemplarisch in Abb. 3 in Form des relativen, systematischen Fehlers der Beschleunigungsschätzung

$$\epsilon_\gamma = \frac{\gamma_E - \gamma_S}{\gamma_S} \quad (26)$$

mit der geschätzten Beschleunigung  $\gamma_E$  und der Simulationsvorgabe  $\gamma_S$  in Abhängigkeit verschiedener Randparameter dargestellt (Grundeinstellung:  $\eta = 0.075 \mu\text{s}^{-1}$ ,  $\gamma = 0.08 \text{ MHz}^2$ ,  $\phi_0 = 1.1$ ,  $\text{SNR} = 63 \text{ dB}$ ). Das SNR wird dabei nach

$$\text{SNR} = 10 \lg \left( \frac{A^2}{\sigma_n^2} \right) \quad (27)$$

aus der maximalen Signalamplitude  $A$  (vgl. Gl. 4) und der Rauschleistung  $\sigma_n^2$  ermittelt. Da der Burst gegenüber der Gesamtlänge des aufgezeichneten Signals recht kurz ist (Aufenthaltszeit von  $5,2 \mu\text{s}$  gegeben durch das  $e^{-2}$ -fache der Maximalamplitude gegenüber einer Aufzeichnungslänge von  $25,6 \mu\text{s}$ ) und keine Vorfilter zum Einsatz kommen, müssen die Signalamplituden recht groß sein, um stabile Schätzungen durchführen zu können. Die in den Diagrammen dargestellten SNR-Werte sind entsprechend groß.

Zum Vergleich wurde das Verfahren aus [3] verwendet, wobei der gesamte Burst (in den Grenzen des  $e^{-2}$ -fachen der Burstamplitude) in der Mitte geteilt wurde und die beiden Teilsignale mittels einer Kurzzeit-FFT einer Frequenzschätzung unterzogen wurden.

Auffällig ist der Einfluss des Signal-Rausch-Verhältnisses (Abb. 3a). Das hier vorgestellte Verfahren ist bei hoher Signalqualität in der Lage, die korrekte Beschleunigung zu ermitteln. Die Schätzung wird jedoch aufgrund des verbreiterten Spektrums (Abb. 1b) bereits für nur geringfügig verrauschte Signale unsicher. Die Kurzzeit-FFT liefert hingegen auch bei hoher Signalqualität keine erwartungstreue Beschleunigungsschätzung. Die Ursache hierfür liegt in der Mittelung über eine Signalhälfte durch die FFT. Erwartungsgemäß gehen dabei die stärkeren Werte aus der Burstmitte stärker in die Schätzung ein als die Randbereiche. Dadurch wird die Dynamik der Schätzung erheblich reduziert und eine deutlich geringere Beschleunigung berechnet.

Wesentlich einflussreicher für die Kurzzeit-FFT ist die Phasenlage des Doppler-Burstes (Abb. 3b). Aufgrund der Auftrennung des Signals in der Burstmitte, wo starke Signalamplituden auftreten, kommt es durch Randeffekte, die stark von der Phasenlage des Signals abhängen, zu erheblichen Fehlern bei der Berechnung der mittleren Doppler-Frequenz. Das hier vorgestellte Verfahren zeigt demgegenüber keine Abhängigkeit von der Phasenlage des Doppler-Burstes.

Entsprechend empfindlich zeigt sich die Kurzzeit-FFT auch gegenüber Veränderungen der anderen Parameter. Abb. 3c zeigt den Einfluss der tatsächlich vorhandenen Beschleunigung. Im Bereich geringer Beschleunigungen (bis etwa  $0.04 \text{ MHz}^2$ ) sind die Ergebnisse sehr stark von den anderen Randwerten abhängig, so dass hier keine Gesetzmäßigkeiten ableitbar sind. Für mittlere Beschleunigungen ist eine deutliche Unterabschätzung der Beschleunigung zu erkennen, die den Darstellungen der anderen Diagramme entspricht. Demgegenüber wird mit dem neuen Verfahren die korrekte Beschleunigung bestimmt. Erst für sehr starke Beschleunigungen kommt es zu Fehlern. Diese treten jedoch erst bei Werten auf, bei denen eine Umkehrung des Richtungssinns innerhalb der Messvolumenpassage auftritt. Damit sind die Einsatzgrenzen des Verfahrens überschritten.

Abschließend wird in Abb. 3d der Einfluss der Burstlänge dargestellt. Der Einfluss auf die Ergebnisse der Kurzzeit-FFT ist dabei besonders stark. Der Fehler alterniert mit sehr

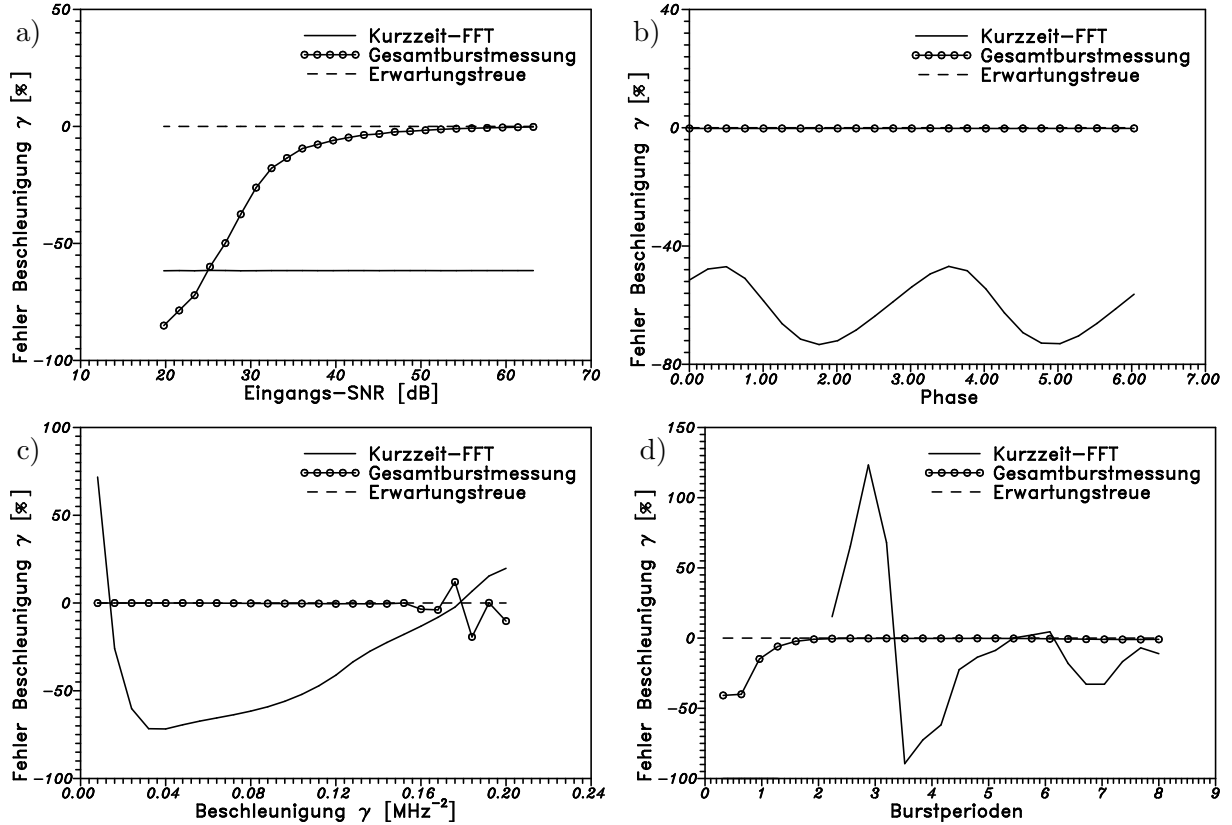


Abbildung 3: Relativer, systematischer Fehler der Beschleunigungsschätzung  $\epsilon_\gamma$  in % des neuen Verfahrens gegenüber der Kurzzeit-FFT: a) in Abhängigkeit von Eingangs-Signal-Rausch-Verhältnis; b) in Abhängigkeit der Burstphase; c) in Abhängigkeit von der Beschleunigung; d) in Abhängigkeit von der Burstlänge

starker Amplitude. Das neue Verfahren erweist sich demgegenüber als sehr robust.

## 5 Experimenteller Einsatz

Das hier vorgestellte Verfahren erweitert die weit verbreitete FFT-basierte Analyse von Doppler-Bursts durch die zusätzliche Interpolation der Phase mit einem Polynom 2. Grades und eine entsprechend erweiterte Parameterbestimmung. Die Bestimmung der mittleren Doppler-Frequenz ist dabei unverändert. Damit ergeben sich durch das neue Verfahren weder Vor- noch Nachteile für eine reine Geschwindigkeitsmessung. Das vorgestellte Verfahren ist somit als zusätzliche Komponente der Signalverarbeitung zu verstehen, das neben der Geschwindigkeit auch Beschleunigungswerte liefert. Es kann somit überall dort zum praktischen Einsatz kommen, wo die Teilchenbeschleunigung von Interesse ist.

Ein relevanter Einsatzfall ist in [3] geschildert, wo aus einer Düse austretende Luft Wirbel erzeugt, die bei einem Messvolumendurchmesser von  $100\ \mu\text{m}$  bereits eine Geschwindigkeitsänderung von  $1,8\ \text{m/s}$  bei einer mittleren Geschwindigkeit von  $10\ \text{m/s}$  hervorrufen. Exemplarisch vermessen wurde in diesem Zusammenhang eine Stauströmung vor einem Stab, wo ähnlich starke Verzögerungen abgeschätzt wurden.

Ein weiterer Einsatzfall ist die direkte Bestimmung der Geschwindigkeit und des Geschwindigkeitsgradienten im Inneren des akustischen Levitators [2, 5]. Wesentlicher Vorteil der Bestimmung der lokalen Beschleunigung aus den Einzelsignalen ist die Möglichkeit der direkten Unterteilung der Bewegungsgleichung eines Fluidelementes

$$\ddot{z} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \dot{z} \quad (28)$$

in einen zeitlichen und einen räumlichen Geschwindigkeitsgradienten.

## 6 Zusammenfassung

Mit dem vorgestellten Verfahren ist es möglich, neben der Teilchengeschwindigkeit auch dessen Beschleunigung aus einem einzelnen Signalmurst zu bestimmen. Der Rechenaufwand der Parameterschätzung aus der Fourier-Transformierten des aufgenommenen Signals ist dabei mit etablierten Verfahren, die auf der Auswertung der Leistungsdichte beruhen, vergleichbar. Obwohl durch das erweiterte Signalmodell ein zusätzlicher Parameter abzuschätzen ist, wird die Schätzqualität im Falle unbeschleunigter Teilchen nicht beeinflusst, da die Bestimmung der Doppler-Frequenz nach dem gleichen Verfahren erfolgt. Darüber hinaus bietet sich durch das vorgestellte Verfahren aber die Möglichkeit, Teilchenbeschleunigungen zu detektieren und zu messen.

Starke Beschleunigungen führen dabei zu einer erhöhten Schätzvarianz und setzen eine höhere Signalqualität voraus. Daher sind einige zusätzliche Optionen für das vorgestellte Verfahren zur Stabilisierung der Parameterschätzung sinnvoll. So können z. B. Glättungsfiler im Amplitudenspektrum zu einer erhöhten Sicherheit bei der Maximumdetektion führen. Durch den Einsatz einer 5-Punkt-Regression sowohl im Amplituden- als auch im Phasenspektrum kann darüber hinaus die Schätzsicherheit vergrößert werden. Des Weiteren können die Schätzergebnisse durch eine modellbasierte, iterative Parameteroptimierung [4] verbessert werden, wodurch eine biasfreie und effiziente Schätzung erreicht wird. Darüber hinaus ist es möglich, das verwendete Signalmodell sehr flexibel an die Messbedingungen anzupassen. So sind z. B. erweiterte Modelle denkbar, die Interferenzstreifenmuster repräsentieren, die vom Idealfall paralleler Interferenzflächen mit identischem Abstand abweichen.

Zur Beurteilung der statistischen Eigenschaften des vorgestellten Verfahrens im Vergleich zu anderen Analyseverfahren wurden umfangreiche Simulationsrechnungen durchgeführt. Dabei wurden sowohl systematische Fehler als auch die Effizienz durch Vergleich der Schätzvarianz mit der Cramér-Rao-Grenze untersucht.

*Die durchgeführten Untersuchungen wurden durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft gefördert (Az. No 373/1).*

## Literatur

- [1] K Hishida, K Kobashi, and M Maeda. Improvement of LDA/PDA using a digital signal processor (DSP). In *Proc. 3rd Int. Conf. on Laser Anemometry*, Swansea, UK, 1989.
- [2] J Keller, M Pfaffenlehner, E Ryssel, C Tropea, A L Yarin, and N Daidzic. Aerodynamic-acoustic levitator for high reynolds number applications. In *Proc. World Congress on Ultrasonics*, pages 827–830, Humboldt-Universität Berlin, Germany, 1995.
- [3] B Lehmann and A Helbig. Laser-Doppler-Messung lokaler Beschleunigungen in turbulenter Strömung. In *Proc. 7. Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik*, 1999. Beitrag 4.
- [4] H Nobach. Simultane Bestimmung von Frequenz, Phase und Zeitverschiebung für PDA-Messungen. In *Proc. 7. Fachtagung Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik*, 1999. Beitrag 11.
- [5] A L Yarin, G Brenn, J keller, M Pfaffenlehner, E Ryssel, and C Tropea. Flowfield characteristics of an aerodynamic acoustic levitator. *Phys. Fluids*, 9(11):3300–3314, 1997.

## Korrektur

S. 3, Gleichung (17):  $c_2 = \phi_0 - \frac{P}{2} - 2\pi f_D T_0$