Statistische Kennwerte und -funktionen

Dr.-Ing. habil. H. Nobach

1. Einführung

Statistische Kennwerte und -funktionen, wie

- Mittelwert
- Varianz
- Wahrscheinlichkeitsdichte
- Autokorrelation
- spektrale Leistungsdichte

repräsentieren die **gemittelten** (zeitlich, räumlich oder Ensemble), **statistischen** Eigenschaften des Signals.

Dabei gehen **Zeit**-, **Orts**- bzw. **Phaseninformationen verloren**.

Die Rekonstruktion des Signals aus den statistischen Kennfunktionen ist nicht möglich.

So ist z.B. die Autokorrelationsfunktion einer harmonischen Schwingung mit beliebiger Phase stets ein Kosinussignal.

Bei **deterministischen** Signalen lassen sich Kennwerte und –funktionen eindeutig angeben.

Beispiel

$$x(t)=\sin(2\pi t)$$

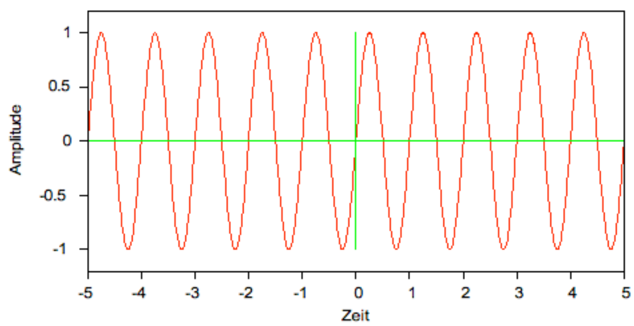
$$p(x)=\begin{cases}\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right)^{-1} & \text{für } |x|<b \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$m_x=0$$

$$\sigma_x^2=\frac{1}{2}$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2}\cos(2\pi\tau)$$

$$S(f)=\frac{1}{4}\left(\delta(f-1)+\delta(f+1)\right)$$



Bei **stochastischen** Signalen steht der tatsächliche Verlauf einer bestimmten Realisierung nicht fest. Deshalb unterscheidet man

- tatsächliche (wahre) Kennwerte und -funktionen des Prozesses
- empirische (geschätzte) Kennwerte und -funktionen der zeitlich begrenzten Realisierung

Beispiel

Gauss-verteiltes, weißes Rauschen x(t) mit dem Mittelwert 0 und der Varianz 1

- wahre Kenngrößen:

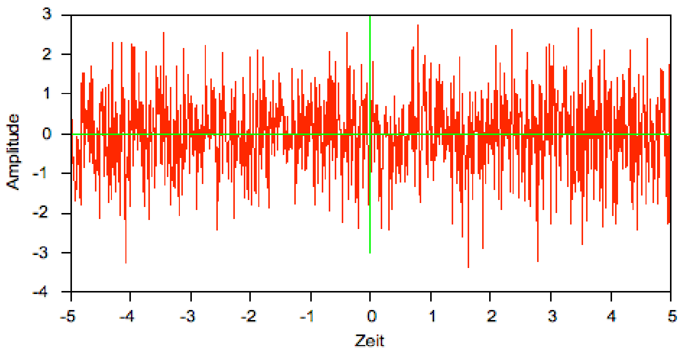
$$m_x = 0 \qquad \sigma_x^2 = 1 \qquad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad R(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- geschätzte Kenngrößen aus einer Realisierung im Interval −T/2≤t≤T/2:

$$\hat{m}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(x(t) - \hat{m}_x\right)^2 dt$$

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_{\max(-T/2, -T/2-\tau)}^{\min(T/2; T/2-\tau)} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$



2. Mittelwert (Anfangsmoment 1. Ordnung)

Definition für ein Leistungssignal mit der Wahrscheinlichkeitsdichte p(x)

$$m_x \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx$$

Äquivalente Definition mit dem kontinuierlichen Zeitsignal x(t)

$$m_x \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

Äquivalente Definition mit dem zeitdiskreten Signal $x_i = x(t_i)$

$$m_x \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Schätzung aus der endlichen Einzelrealisierung eines stochastischen Signals im Intervall [a;b]

$$\hat{m}_x = \frac{1}{T} \int_a^b x(t)\,dt \quad T = b - a$$

Äquivalente Definition für ein periodisches Signal mit der Periode T

$$m_x \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt$$

Schätzung aus der endlichen Einzelrealisierung eines stochastischen Signals im Intervall [a;b]

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=a}^{b} x_i \quad N = b - a + 1$$

Äquivalente Definition für ein periodisches Signal mit der Periode N

$$m_x \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Hinweise:

- Die Möglichkeit, für periodische Signale den Grenzübergang T→∞ bzw. N→∞ durch die Periode T bzw. N zu ersetzen ist nicht trivial. Der Nachweis wird hier jedoch nicht erbracht.

- Das Intervall [a;b] für die Schätzung aus einer endlichen Realisierung eines stochastischen Signals muss so gewählt werden, dass
- die Korrelationsfunktion am Ende abgeklungen ist,
- T bzw. N ein Vielfaches der Periode eines evtl. vorhandenen periodischen Anteils ist.
- Für Energiesignale gibt es keine Definition eines Mittelwertes.
- Der wahre Mittelwert einer Zufallsgröße x wird auch als Erwartungswert E{x} bezeichnet. In englischsprachiger Literatur wird der Erwartungswert oft auch mit $\langle x \rangle$ bezeichnet.

3. Varianz (Zentralmoment 2. Ordnung)

Definition für ein Leistungssignal mit der Wahrscheinlichkeitsdichte p(x)

$$\sigma_x^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 p(x)\, dx$$

Äquivalente Definition mit dem kontinuierlichen Zeitsignal x(t)

$$\sigma_x^2 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(x(t)-m_x\right)^2 dt$$

Äquivalente Definition mit dem zeitdiskreten Signal $x_i = x(t_i)$

$$\sigma_x^2 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i-m_x\right)^2$$

Schätzung aus der endlichen Einzelrealisierung eines stochastischen Signals im Intervall [a;b]

bei bekanntem m_x:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T} \int_a^b \left(x(t)-m_x\right)^2 dt$$
$$T = b-a$$

bei unbekanntem m_x:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T} \int_a^b \left(x(t)-\hat{m}_x\right)^2 dt$$
$$T = b-a$$

Äquivalente Definition für ein periodisches Signal mit der Periode T

$$\sigma_x^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \left(x(t)-m_x\right)^2 dt$$

Schätzung aus der endlichen Einzelrealisierung eines stochastischen Signals im Intervall [a;b]

bei bekanntem m_x:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=a}^{b} \left(x_i-m_x\right)^2$$
$$N = b-a+1$$

bei unbekanntem m_x:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=a}^{b} \left(x_i-\hat{m}_x\right)^2$$
$$N = b-a+1$$

Äquivalente Definition für ein periodisches Signal mit der Periode N

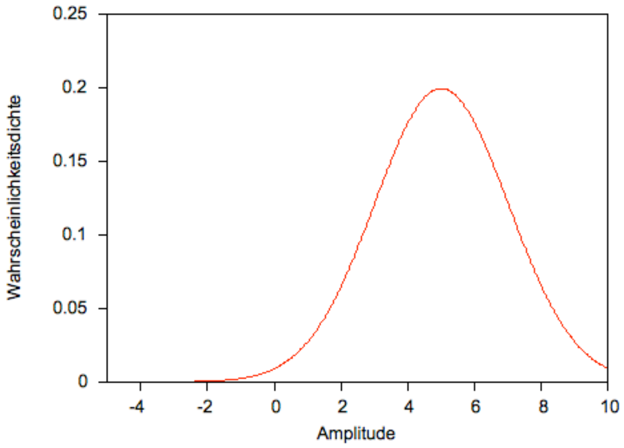
$$\sigma_x^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i-m_x\right)^2$$

Beispiel

Normalverteiltes (Gauss-verteiltes) Rauschen x

- Charakterisierung erfolgt über die Wahrscheinlichkeitsdichte p(x):

$$p(x)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2b^2}}$$



- Hieraus ergeben sich die Momente:

$$m_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, d\, x = a$$

$$\sigma_x^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 p(x)\, d\, x = b^2$$

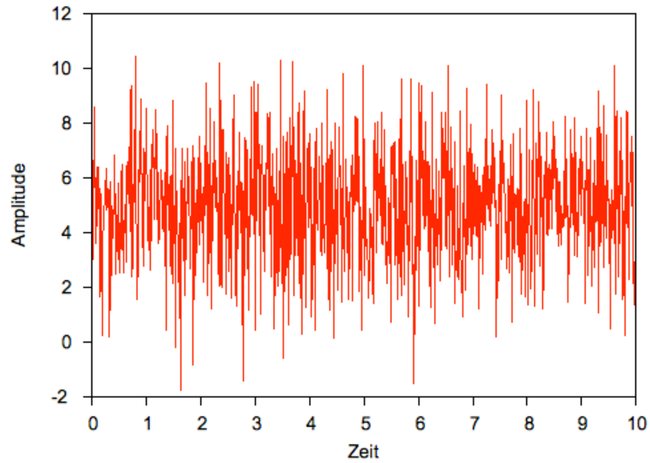
$$a=5 \quad b=2 \quad \Rightarrow \quad m_x=5 \quad \sigma_x^2=4$$

- Aus einer einzelnen Realisierung des Rauschprozesses x(t) im Intervall [0;T] ergeben sich die geschätzten Momente:

$$\hat{m}_x=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, d\, t$$

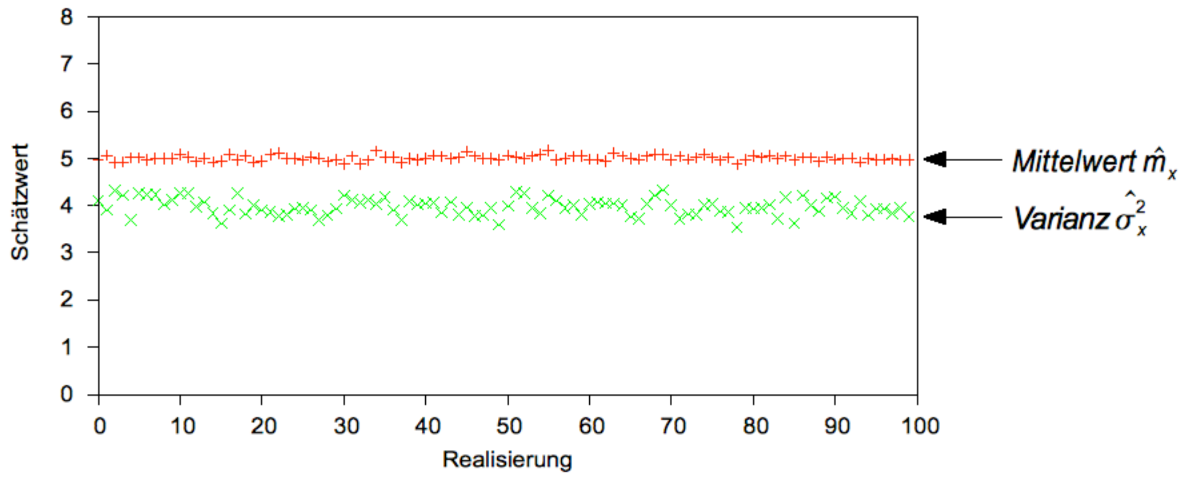
$$\hat{\sigma}_x^2=\frac{1}{T}\int_0^T \left(x(t)-\hat{m}_x\right)^2 d\, t$$

$$\hat{m}_x=4.96 \quad \sigma_x^2=4.11$$



4. Erwartungstreue, Schätzvarianz und Effizienz

- Die geschätzten Kenngrößen sind für jede Realisierung des stochastischen Signals unterschiedlich.
- Damit stellen die geschätzten Kenngrößen ebenfalls **Zufallsgrößen** mit **ihren** charakteristischen Kenngrößen dar.



- Stimmen Erwartungswert der geschätzten Kenngröße und wahrer Wert der Kenngröße des betrachteten Zufallsprozesses überein, so ist die Schätzung **erwartungstreu**.

$$E\{\hat{m}_x\} = m_x \qquad E\{\hat{\sigma}_x^2\} = \sigma_x^2$$

- Die Varianz der Kenngrößenschätzung ist die **Schätzvarianz**.
- Man versucht stets, erwartungstreue Schätzer mit möglichst kleiner Schätzvarianz zu finden. Der Schätzer mit der kleinst möglichen Schätzvarianz ist **effizient**.

5. Autokorrelationsfunktion

- Die Autokorrelationsfunktion beschreibt den zeitlichen Zusammenhang eines Funktionsverlaufes (z.B. periodische Anteile, Systemträgheit)
- Die Autokorrelation eines Leistungssignals x(t) ist definiert als

$$R_{xx}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E\{x(t)\,x(t+\tau)\}$$

- Sie hat die Dimension einer Leistung (Signalamplitude^2).
- Hinweise:
  - Die Autokovarianzfunktion $C_{xx}(\tau)$ entspricht der Autokorrelationsfunktion des mittelwertfreien Signals $x'(t)=x(t)-m_x$.
  - $C_{xx}(0)$ entspricht der Varianz $\sigma_x^2=E\{(x(t)-m_x)^2\}$ des Signals x(t).
  - Die obige Definition ist äquivalent zu

$$R_{xx}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

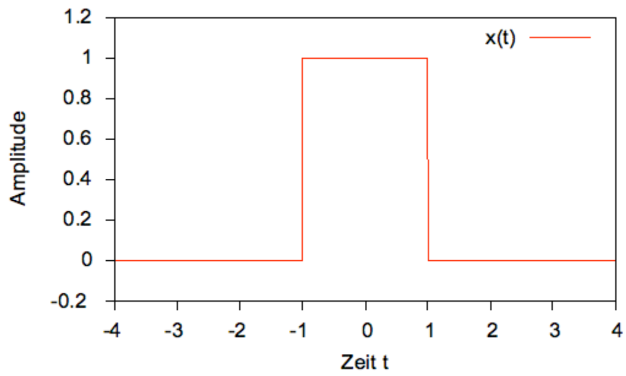
- Für Energiesignale gilt die folgende Definition. Die Korrelationsfunktion hat hier die Dimension einer Energie (Zeit · Signalamplitude^2).

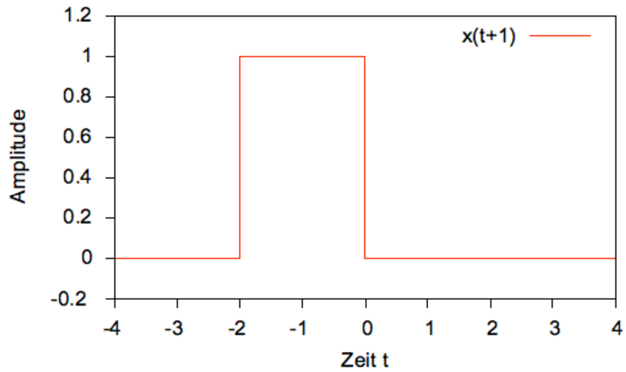
$$R_{xx}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

Beispiele

- symmetrischer Rechteckimpuls:

$$x(t)=\begin{cases}1 & \text{für } -1 \le t \le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$





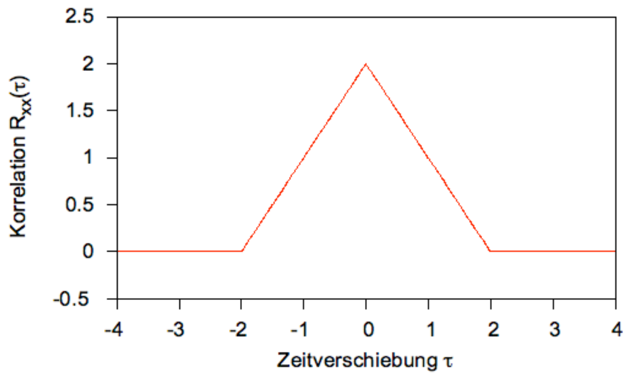
$$R_{xx}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t+\tau)\,dt \qquad \text{(Energiesignal)}$$

$x(t+\tau)$ ist 1 in $[-1-\tau;1-\tau]$ und sonst 0.

$x(t)$ ist 1 in $[-1;1]$ und sonst 0.

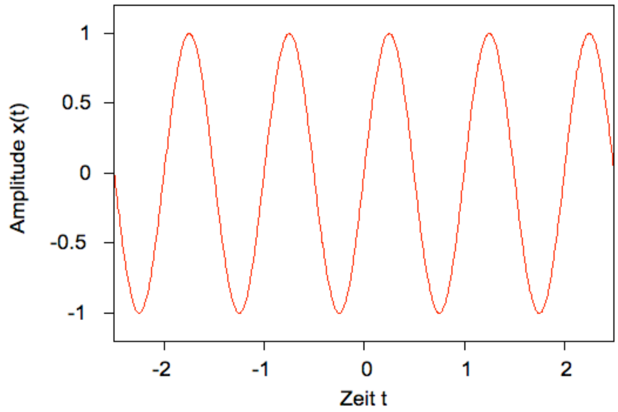
$$R_{xx}(\tau)=\begin{cases}\int_{-1}^{1-\tau} 1\,dt & \text{für } 0 \le \tau \le 2\\ \int_{-1-\tau}^{1} 1\,dt & \text{für } -2 \le \tau \le 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$R_{xx}(\tau)=\begin{cases}2-|x| & \text{für } |x|<2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$



- harmonische Schwingung:

$x(t)=\sin(2\pi t)$



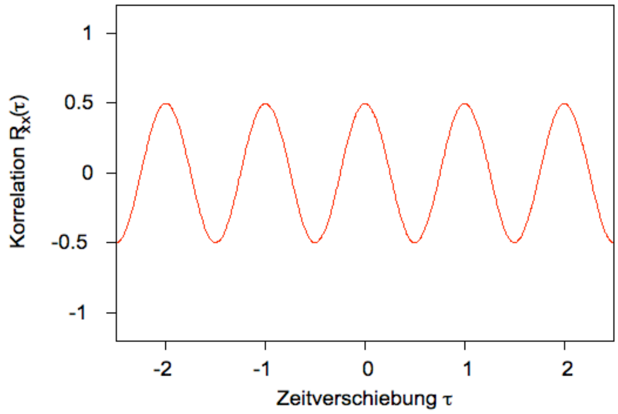
$$R_{xx}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,dt \quad \text{(periodisches Leistungssignal)}$$

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T \sin(2\pi t)\sin(2\pi t+2\pi\tau)\,dt$$

$$=\frac{1}{2T}\int_0^T \cos(2\pi\tau)\,dt-\frac{1}{2T}\int_0^T \cos(4\pi t+2\pi\tau)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\cos(2\pi\tau)+\frac{1}{8\pi T}\sin(4\pi t+2\pi\tau)\Big|_0^T$$

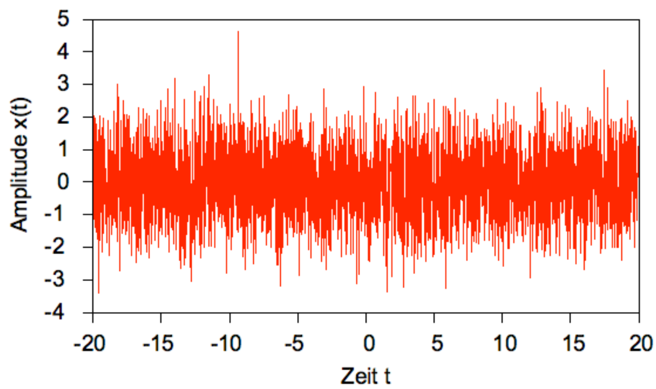
$$=\frac{1}{2}\cos(2\pi\tau)$$



$$\sin x \sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$$

- Gauss-verteiltes, weißes Rauschen:

$x(t)$ *mit* $m_x=0$ *und* $\sigma_x^2=1$



- theoretische Autokorrelationsfunktion

$$R_{xx}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,x(t+\tau)\,dt \qquad \text{(Leistungssignal)}$$

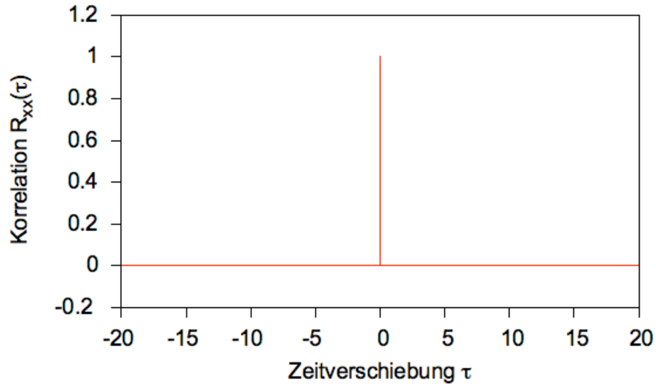
Da x(t) und x(t+τ) für $\tau \neq 0$ statistisch unabhängig sind, lässt sich diese Definition mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichte darstellen als

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,p(x)\,dx & \text{für } \tau = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,p(x)\,p(y)\,dx\,dy & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\quad x = x(t) \qquad y = x(t+\tau)$

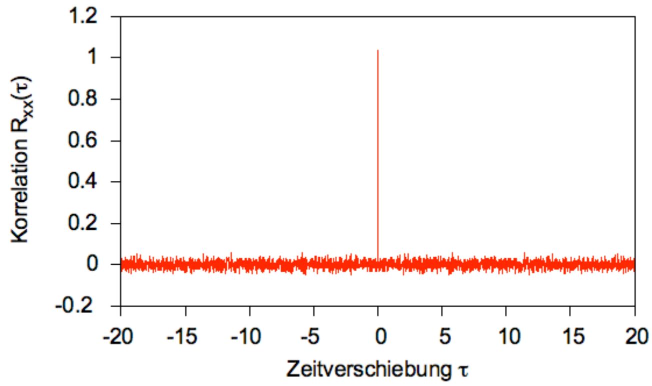
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



- Schätzung aus periodisch fortgesetztem Ausschnitt einer Einzelrealisierung:

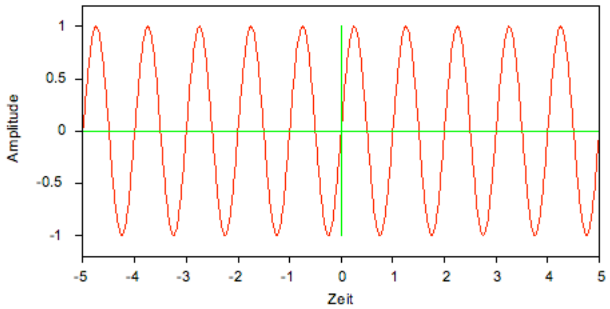
$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$



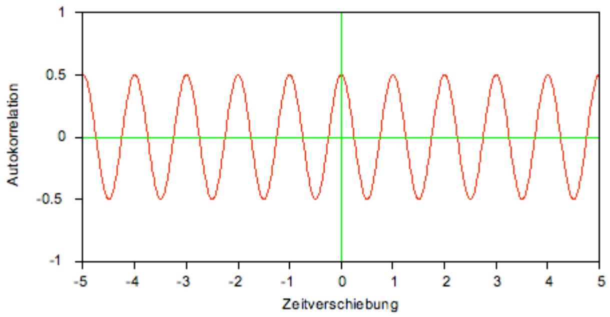
Anwendung

- Signaldetektion im Rauschen
    - Harmonisches Signal

$$x(t)=\sin(2\pi t)$$

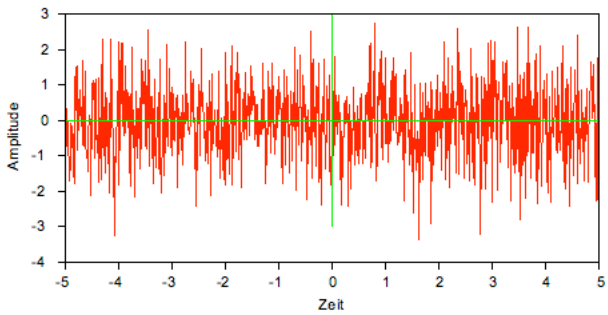


$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{2}\cos(2\pi\tau)$$

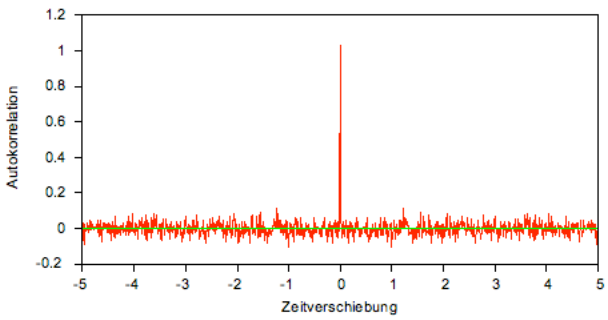


- Gauß-verteiltes, weißes Rauschen

$$m_y=0 \quad \sigma_y^2=1$$

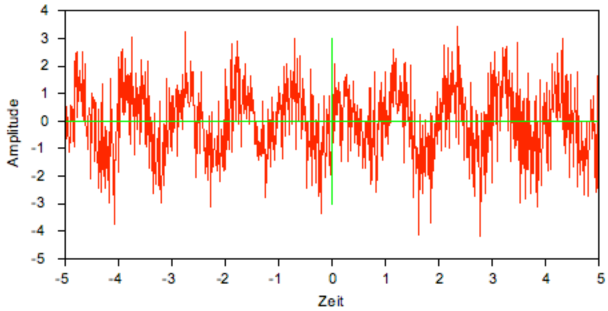


$$R_{yy}(\tau)=\begin{cases}1 & \textit{für } \tau=0\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}$$

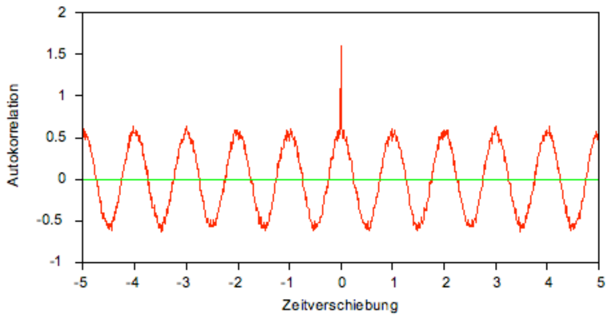


- Überlagerung

$z(t)=x(t)+y(t)$



$R_{zz}(\tau)=R_{xx}(\tau)+R_{yy}(\tau)$



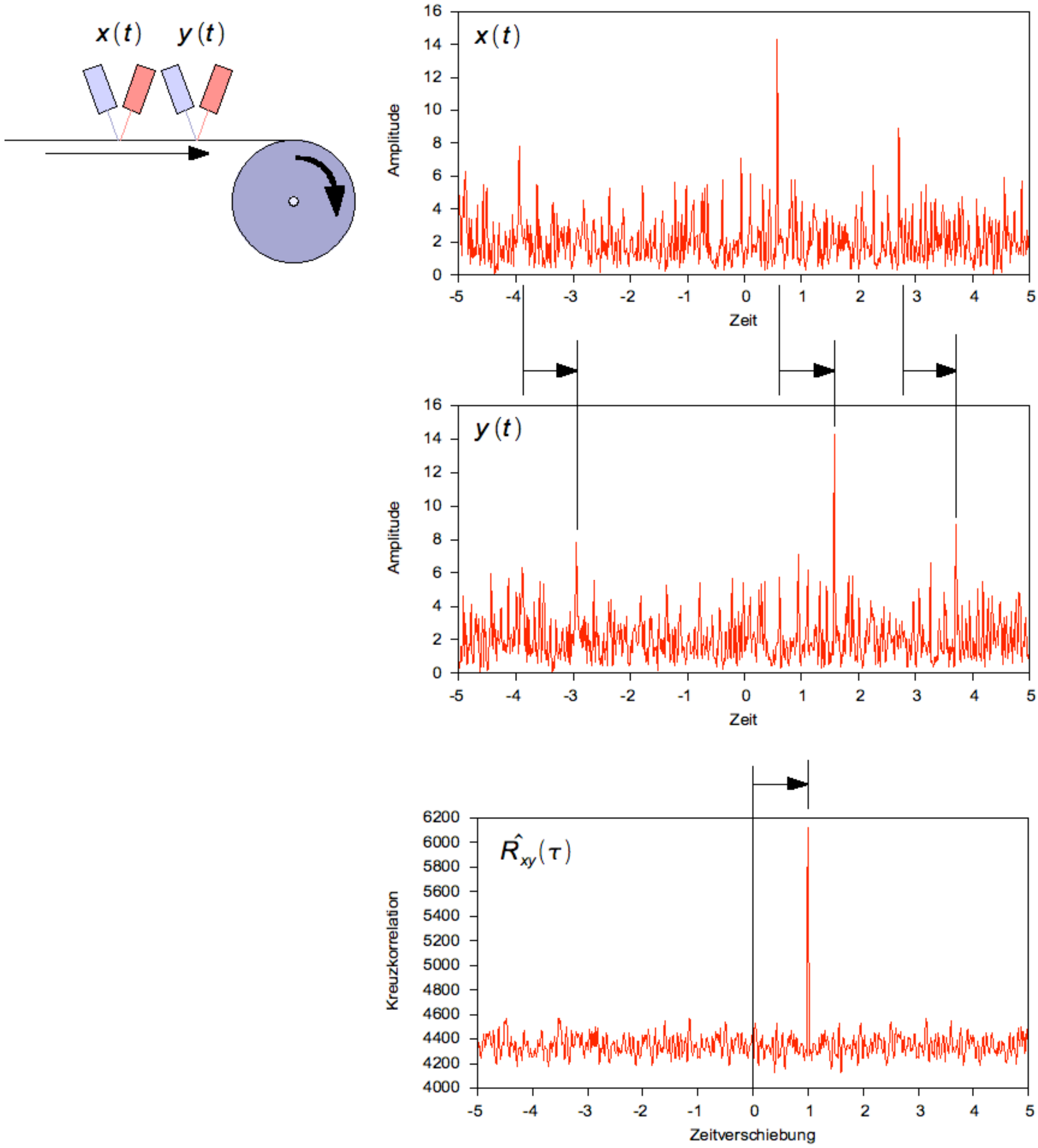
6. Kreuzkorrelation

Die Kreuzkorrelationsfunktion beschreibt den zeitlichen Zusammenhang von zwei Signalen x(t) und y(t). Zwei äquivalente Definitionen für Leistungssignale sind

$$R_{xy}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E\{x(t)\,y(t+\tau)\} \qquad R_{xy}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,y(t+\tau)\,dt$$

Anwendung

Geschwindigkeitsbestimmung einer Papierbahn mit zwei Reflexlicht-schranken



7. Korrelationskoeffizient

Der Korrelationskoeffizient ist die auf die Varianz normierte Kovarianzfunktion

$$\rho_{xx}(\tau)=\frac{C_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \qquad \rho_{xy}(\tau)=\frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2}}$$

Er liegt zwischen −1 und +1:

- $\rho(\tau)=+1$: identische Werte nach Verschiebung um τ
- $\rho(\tau)=-1$: entgegengesetzte Werte nach Verschiebung um τ
- $\rho(\tau)=0$: keine Korrelation

8. Leistungsdichtespektrum

Das (Auto-)Leistungsdichtespektrum eines Leistungssignals x(t) ist definiert als

$$S_{xx}(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X(j\omega)|^2 \qquad X(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad |X(j\omega)|^2 = X^*(j\omega) X(j\omega)$$

Für das Kreuzleistungsdichtespektrum zweier Leistungssignale x(t) und y(t) gilt entsprechend

$$S_{xy}(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} X^*(j\omega) Y(j\omega) \qquad X(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad Y(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-j\omega t} dt$$

Hinweise:

$X^*(j\omega)$ ist die konjugiert komplexe zu $X(j\omega)$.

Für Energiesignale sind die Definitionen für die Energiedichtespektren entsprechend

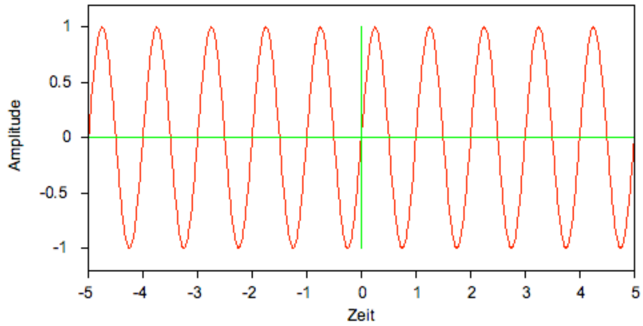
$$S_{xx}(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |X(j\omega)|^2 \qquad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$S_{xy}(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} X^*(j\omega) Y(j\omega) \qquad Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt$$

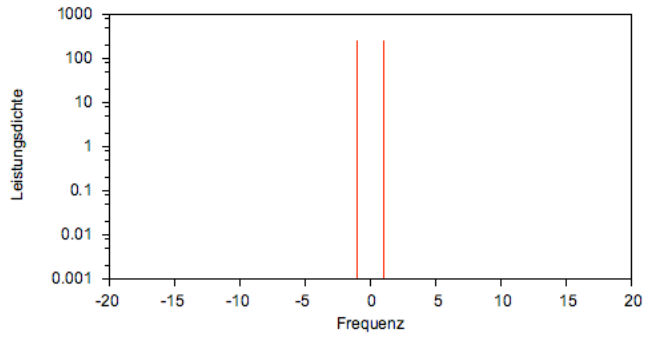
Anwendung

- Signaldetektion im Rauschen
  - Harmonisches Signal

$$x(t)=\sin(2\pi t)$$

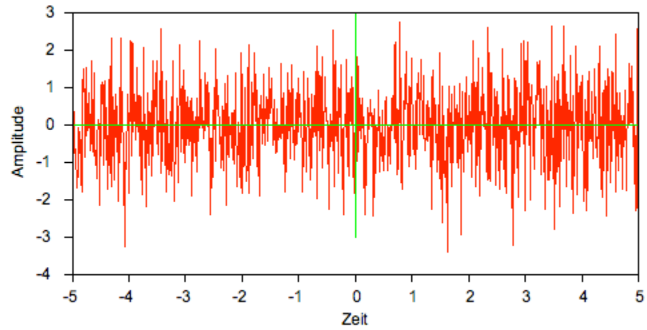


$$S_{xx}(f)=\frac{1}{4}[\delta(f-1)+\delta(f+1)]$$

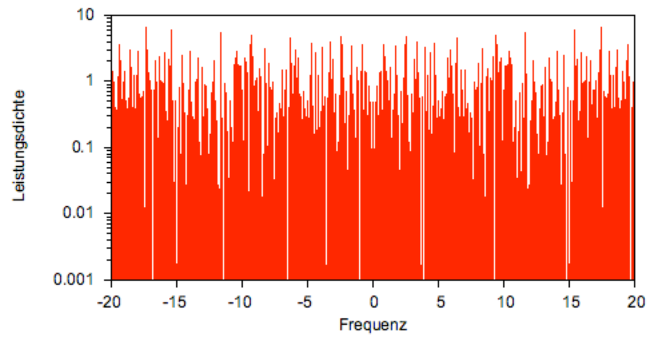


  - Gauß-verteiltes, weißes Rauschen

$$m_y=0 \quad \sigma_y^2=1$$

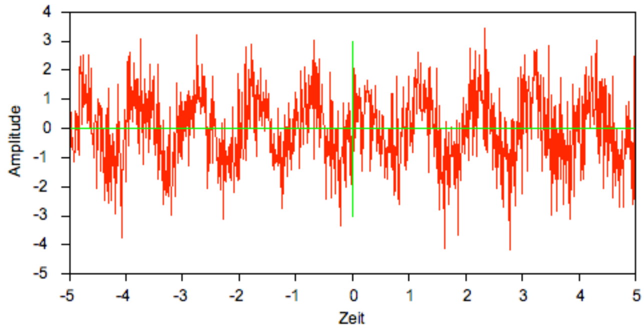


$$S_{yy}(f)=1$$

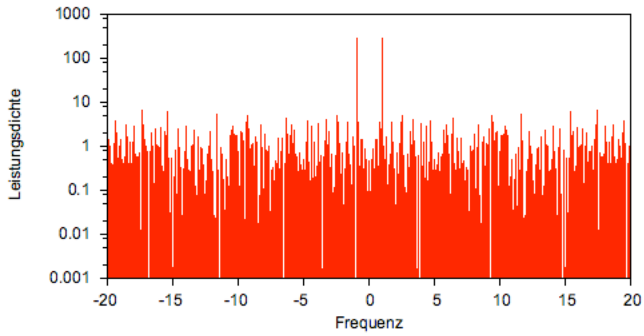


- Überlagerung

$$z(t)=x(t)+y(t)$$



$$S_{zz}(f)=S_{xx}(f)+S_{yy}(f)$$



9. Wiener-Khintschin-Theorem

Das Wiener-Khintschin-Theorem gibt den Zusammenhang zwischen dem Leistungsdichtespektrum und der Korrelationsfunktion an:

$$R_{xx}(\tau) \underset{\text{IFT}}{\overset{\text{FT}}{\rightleftarrows}} S_{xx}(j\omega) \qquad R_{xy}(\tau) \underset{\text{IFT}}{\overset{\text{FT}}{\rightleftarrows}} S_{xy}(j\omega)$$

Für Leistungssignale ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$R_{xx}(\tau) \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$$S_{xx}(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \right|^2$$

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longrightarrow & R_{xx}(\tau) \\ & \searrow & \text{FT} \downarrow \uparrow \text{IFT} \\ & & S_{xx}(j\omega) \end{array}$$

entsprechende Zusammenhänge gelten auch für die Kreuzkorrelation und die Kreuzleistungsdichte

Für Energiesignale gilt:

$$R_{xx}(\tau) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longrightarrow & R_{xx}(\tau) \\ \text{FT} \downarrow \uparrow \text{IFT} & & \text{FT} \downarrow \uparrow \text{IFT} \\ X(j\omega) & \longrightarrow & S_{xx}(j\omega) \end{array}$$

$$S_{xx}(j\omega) = |X(j\omega)|^2$$

entsprechende Zusammenhänge gelten auch für die Kreuzkorrelation und die Kreuzleistungsdichte

10. Beobachtungsintervall

Probleme

- Die Definitionen der Korrelationsfunktion und der Leistungsdichte von Leistungssignalen stellen folgende Anforderungen:
    - Grenzübergang $\to\infty$
    - unendlich lange Messzeit (bis ∞)
    - Erfassung des zurückliegenden Signalverlaufs (bis $-\infty$)
- Damit sind diese Definitionen für die praktische Realisierung ungeeignet.
- Die Fourier-Transformierte ist für Leistungssignale nicht definiert.

Ausweg

Da die reale Messung immer innerhalb von Zeitfenstern erfolgt, werden zeitbegrenzte Leitungssignale angenommen. Die Messung erfolgt o.B.d.A. in [0;T]. Damit ist die FT als

$$FT\{x(t)\}=X(j\omega)=\int_0^T x(t)e^{-j\omega t}dt$$

definiert und die Zusammenhänge aufgrund des Wiener-Khintschin-Theorems werden zu

$$\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[rr, "R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{\max(0,-\tau)}^{\min(T;T-\tau)} x(t)x(t+\tau)dt"] \arrow[d, shift right, "FT"'] & & R_{xx}(\tau) \arrow[d, shift right, "FT"'] \\
X(j\omega) \arrow[u, shift right, "IFT"'] \arrow[rr, "S_{xx}(j\omega)=\frac{1}{T}|X(j\omega)|^2"'] & & S_{xx}(j\omega) \arrow[u, shift right, "IFT"']
\end{tikzcd}$$

Hinweise:

- Der betrachtete Zeitausschnitt des Leistungssignals ist eine Realisierung eines Zufallsprozesses (gesamtes Leistungssignal).
- Die Berechnungsvorschrift der Korrelationsfunktion für zeitbegrenzte Leistungssignale entspricht nicht der Definition $R_{xx}(\tau)\overset{\text{def}}{=}E\{x(t)x(t+\tau)\}$.
- Die so berechnete Korrelationsfunktion ist Eigenschaft des betrachteten Signalausschnitts. Damit stellt sie eine Einzelschätzung der Korrelationsfunktion des Leistungssignals dar, ist aber **nicht erwartungstreu**.

$$E\left\{\frac{1}{T}\int_{max(0,-\tau)}^{min(T;T-\tau)} x(t)x(t+\tau)dt\right\} \neq E\left[x(t)x(t+\tau)\right]$$

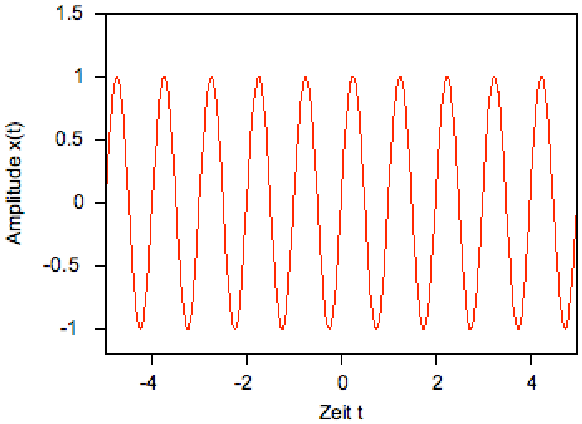
- Eine erwartungstreue Schätzung erreicht man z.B. mit

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T-|\tau|}\int_{max(0,-\tau)}^{min(T;T-\tau)} x(t)x(t+\tau)dt$$

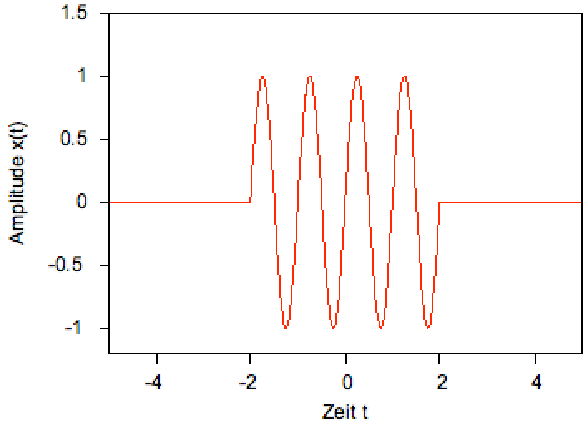
- Bei Verwendung der diskreten Fourier-Transformation für zeitdiskrete Signale gelten ähnliche Beziehungen. Dabei wird von einer periodischen Fortsetzung des Ausschnittes ausgegangen. Dadurch sind auch die Fourier-Transformierte, die Korrelationsfunktion und die Leistungsdichte diskrete, periodische Funktionen.

Beispiel: Sinusschwingung

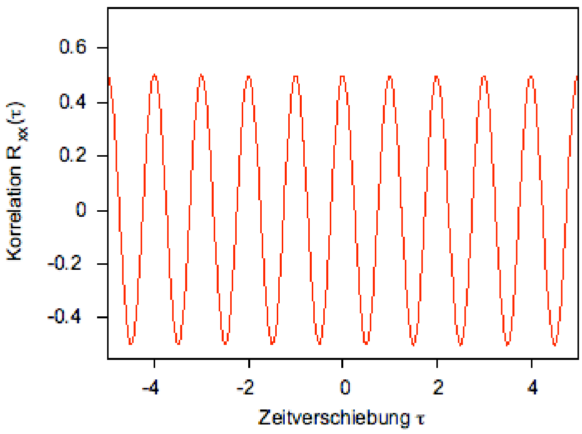
$$x(t)=\sin(2\pi t)$$



$$x(t)=\begin{cases}\sin(2\pi t) & \text{für } -2\leq t\leq 2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

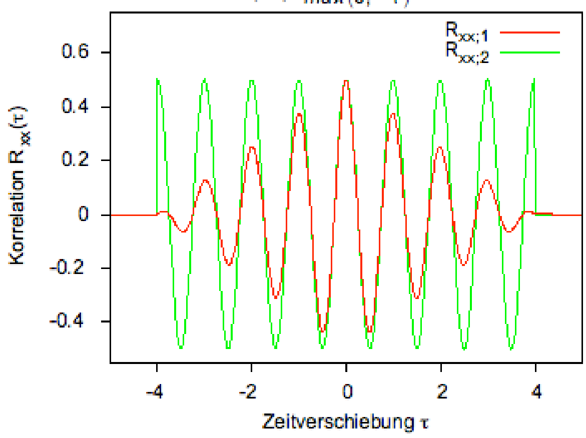


$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{2}\cos(2\pi\tau)$$



$$R_{xx;1}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{max(0,-\tau)}^{min(T;T-\tau)} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_{xx;2}(\tau)=\frac{1}{T-|\tau|}\int_{max(0,-\tau)}^{min(T;T-\tau)} x(t)x(t+\tau)dt$$



11. Zusammenfassung

Signaltransformationen

- kontinuierliche, periodische Signale: ⇨ Fourier-Reihe
- kontinuierliche Energiesignale: ⇨ Fourier-Transformation
- kontinuierliche Signale mit best. Anfangszeit: ⇨ Laplace-Transformation
    - gilt sowohl für deterministische als auch für stochastische Signale
    - verlustfreie Rekonstruktion des Signals möglich

Statistische Kennfunktionen

- Autokorrelationsfunktion (unterschiedliche Definitionen für Energie- und Leistungssignale)
- Kreuzkorrelationsfunktion (unterschiedliche Definitionen für Energie- und Leistungssignale)
- (Auto-) Leistungsdichtespektrum (für Leistungssignale)
- Kreuzleistungsdichtespektrum (für Leistungssignale)
- (Auto-) Energiedichtespektrum (für Energiesignale)
- Kreuzenergiedichtespektrum (für Energiesignale)
    - gilt sowohl für deterministische als auch für stochastische Signale
    - Realisierung eines zeitlich begrenzten Ausschnitts (Beobachtungsintervall) aus stochastischen Leistungssignalen für die Schätzung
    - Rekonstruktion des Signals nicht möglich, da Zeit- bzw. Phaseninformationen verloren gehen

http://www.nambis.de/nambisDSP

nambis Digital Signal Processor

Holger Nobach

Quick Guide
Manual
Download & Installation

The *nambis Digital Signal Processor* (DSP) is a script driven program for processing equally sampled signals of real or complex data. Executable binary files are available for Mac OS X and Windows XP. The *nambis Editor*, additionally, requires the installation of a Java Runtime Environment on the specific operating system. The visualization of the functions, additionally, requires the installation of Gnuplot on the specific operating system.